2 Bewegung in einer Dimension

Durchschnittsgeschwindigkeit $$\bar{v} := \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Momentangeschwindigkeit $$v := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x\,(t + \Delta t) - x\,(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$$

Durchschnittsbeschleunigung $$\bar{a} := \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad [a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Momentanbeschleunigung $$a := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\,(t + \Delta t) - v\,(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{x}$$

konstante Beschleunigung $$v = v_0 + a \cdot t\,, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$

Bremswegformel $$s = x - x_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a}$$ (s für Strecken, x für Orte)

3 Bewegung im dreidimensionalen Raum

Ortskurve $$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Momentangeschwindigkeit $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

Beschleunigung $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

3.2 Der schiefe Wurf

Winkel θ_0 zwischen waagerechter x-Achse und Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_o$,
$a_x = 0$, $a_y = -g$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$, $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$

Bewegung in x-Richtung $$x = v_{0x} t = (v_0 \cos\theta_0)\, t$$

Bewegung in y-Richtung $$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y}{2} t^2 = (v_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{g}{2} t^2$$

explizite Wegfunktion $$y = (\tan\theta_0) \cdot x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta_0} \cdot x^2$$

Geschwindigkeit in y-Richtung $$v_y = \dot{y} = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

Wurfweite $$R = \frac{{v_0}^2}{g} \sin(2\theta_0)$$ max. Wurfweite bei $\theta_0 = 45°$

Steigzeit $$T = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

Steighöhe $$H = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$$ max. Höhe bei $\theta_0 = 90°$

3.3 Kreisbewegung

Winkelzeitfunktion $\varphi = \varphi(t) = \frac{s}{r}$ $[\varphi] = 1$ ($\hat{=}$rad)

s: Strecke auf Kreisbogen, r: Kreisradius

$$\langle\text{Winkel in }°\rangle = \left(\frac{180°}{\pi \cdot \text{rad}}\right) \cdot \langle\text{Winkel rad}\rangle$$

Winkelgeschwindigkeit $\omega := \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$ $[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}$ $\left(\hat{=}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$

$\dot{\varphi} = 2\pi\dot{n} \quad \rightarrow \quad \omega = 2\pi f$

Winkelbeschleunigung $\alpha := \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ $[\alpha] = \frac{1}{\mathrm{s}^2}$ $\left(\hat{=}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right)$

Umdrehungszahl $n = \frac{\varphi}{2\pi}$, $\varphi = 2\pi n$

Drehzahl, Frequenz $f := \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \dot{n}$ $[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{Hz}$ (Hertz)

Periodendauer $T = \frac{1}{f}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit $\omega = \text{const}$ $[T] = \mathrm{s}$

Bewegung mit konst. Winkelgeschwindigkeit $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ $\alpha = 0$

Bewegung mit konst. Winkelbeschleunigung $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

Vergleich mit eindimensionaler Bewegung $\varphi \leftrightarrow x$, $\omega \leftrightarrow v$, $\alpha \leftrightarrow a$

Bahngeschwindigkeit $v = r\omega$ $\omega = \text{const}$

tangential zur Kreisbahn

Zentripedalbeschleunigung $a_r = r\omega^2$, $a_r = \frac{v^2}{r}$ $\omega = \text{const}$

zum Mittelpunkt gerichtet

beschleunigte Kreisbewegung $v = r\omega$, $a_r = r\omega^2$, $a_t = r\alpha$ $\omega \neq \text{const}$

v, a_t tangential zur Kreisbahn,

a_r zum Mittelpunkt gerichtet, $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

4 Kraft und Bewegung

Aktionsgesetz (2. NEWTONsches Axiom) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $[F] = \mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}^2}$

Reaktionsgesetz (3. NEWTONsches Axiom) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Federkraft $F_D = -Dx$ $[D] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$

D nur im linearen Bereich der Federdehnung gültig.

Gravitationskraft $\vec{F}_G = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\hat{\vec{r}}$, $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

Gravitionskonstante $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{kg}^2}$

$\hat{\vec{r}}$: Einheitsvektor zu $\vec{r}$

Haftreibung $F_{\mathrm{HR,max}} = \mu_0\,F_N$ μ_0: Haftreibungskoeffizient

Normalkraft F_N wird senkrecht zur Unterlage ausgeübt

Gleitreibung $F_{\mathrm{GR}} = \mu\,F_N$ μ: Gleitreibungskoeffizient

bei gleichen Bedingungen in der Regel $\mu < \mu_0$

Fahrwiderstand $F_F = \mu_F\,F_N$ μ_F: Fahrwiderstandskoeffizient

ohne/mit geschwindigkeitsabhängiger Luftreibung

Schiefe Ebene $F_N = F_{g\perp} = F_g \cos\theta = mg\cos\theta$, $F_{g\|} = F_g \sin\theta = mg\sin\theta$

Steigungswinkel θ, Hangabtriebskraft $F_{g\|}$

4.5 Trägheitskräfte

Inertialsystem Σ: unbeschleunigtes Bezugssystem (BS), $\vec{F} = m\vec{a}$ gilt.

beschleunigtes BS Σ^* : $\vec{r}^{\,*} = \vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{tr}}$, $\vec{v}^{\,*} = \vec{v} - \vec{v}_{\mathrm{tr}}$, $\vec{a}^{\,*} = \vec{a} - \vec{a}_{\mathrm{tr}}$

Σ^* entspricht mitbeschleunigten Beobachter.

BS bewegt sich mit r_{tr}, v_{tr}, a_{tr} zu Σ.

Trägheitskraft $\vec{F}_{\mathrm{tr}} = -m\,\vec{a}_{\mathrm{tr}}$ erklärt Kraftwirkung auf m für Σ^* ($\vec{a}^{*} = 0\,!$)

Zentrifugalkraft $F_Z = m\,\omega^2\,r$

Erklärt Gegenkraft zur Zentripedalkraft $F_r = m\,a_r$ für mitrotierenden Beobachter.

5 Arbeit und Energie

Arbeit $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ (Skalarprodukt) $\qquad [W] = \mathrm{N\,m} = \dfrac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = \mathrm{J}$ (Joule)

Arbeitsintegral $W = \displaystyle\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,, \quad W = \int_{x_A}^{x_B} F(x) \cdot \mathrm{d}x$ (gerade Kurve)

Spannarbeit einer Feder $W = \dfrac{D}{2}\left({x_b}^2 - {x_a}^2\right)$

Hubarbeit $W_{\mathrm{Hub}} = m\,g\,h$ (wegunabhängig)

Reibungsarbeit $W_R = F_R\,s$ $\qquad s$: Weglänge, F_R: Reibungskraft

Beschleunigungsarbeit $W = \dfrac{m}{2}\left({v_b}^2 - {v_a}^2\right)$

kinetische Energie $E_K = \dfrac{m}{2}\,v^2$ $\qquad [E] = [W]$

Satz der Beschleunigungsarbeit $W = E_{K,B} - E_{K,A}$

potentielle Energie $E_P(x) = m\,g\,x$ (Lageenergie), $E_P(x) = \dfrac{D}{2}\,x^2$ (Feder)

Energiesatz $E_{K,B} + E_{P,B} = E_{K,A} + E_{P,A}$ ohne Reibung (konservativ)

$E_{K,B} + E_{P,B} + W_{\mathrm{Reib}} = E_{K,A} + E_{P,A}$ Reibung vorhanden

mittlere Leistung $\bar{P} := \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ $\qquad [P] = \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = W = \mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^3}}$

momentane Leistung $P := \displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W}\,, \qquad P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

6 Impuls und Stoß

Schwerpunkt eines Teilchensystems $x_s = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i \qquad m = \sum_{j=1}^{n} m_j$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad \vec{r}_{s/i} = \begin{pmatrix} x_{s/i} \\ y_{s/i} \\ z_{s/i} \end{pmatrix}$$

Impuls $\vec{p} = m\,\vec{v}\,, \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}\,, \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ mit $F = \mathrm{const} \qquad [p] = \dfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$

Gesamtimpuls $\vec{p} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i = m\,\vec{v}_s$

$\vec{v}_s$: Schwerpunktgeschwindigkeit eines Teilchensystems

Impulssatz $\dot{\vec{p}} = \vec{F^a}$ $\qquad \vec{F^a}$: (nur) äußere Kräfte

Impulserhaltungssatz $\vec{F^a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \mathrm{const}$

Ohne äußere Kräfte bleibt der Impuls unverändert.

Satz vom Schwerpunkt $m\,\vec{a}_s = \vec{F^a}$ Jeder Körper läßt sich auf eine äquivalente Punktmasse in seinem Schwerpunkt reduzieren.

(zentraler) elastischer Stoß

Massen m_1 und m_2, Geschwindigkeit vorher v_1 und v_2, nachher v_1' und v_2'.

Impulserhaltung $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Energieerhaltung $\dfrac{m_1}{2}\,{v_1}^2 + \dfrac{m_2}{2}\,{v_2}^2 = \dfrac{m_1}{2}\,{v_1'}^2 + \dfrac{m_2}{2}\,{v_2'}^2$

ergibt: $v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\,v_2\,, \qquad v_2' = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,v_2 + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\,v_1$

2. Masse ruht: $v_2 = 0\,, \qquad v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1\,, \qquad v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\,v_1$

$$\begin{array}{lcl} m_1 > m_2 & : & v_1' > 0\,, \quad v_2' > 0 \\ m_1 = m_2 & : & v_1' = 0\,, \quad v_2' = v_1 \\ m_1 < m_2 & : & v_1' < 0\,, \quad v_2' > 0 \end{array}$$

vollkommen unelastischer Stoß

Massen m_1 und m_2, Geschwindigkeit vorher v_1 und v_2, nachher gemeinsam v'. Die Massen haften aneinander, es gilt nur Impulserhaltung, da mit kinetischer Ausgangsenergie Verformungsarbeit geleistet wird.

Impulserhaltung $\quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\ \vec{v'}$

ergibt: $\quad \vec{v'} = \dfrac{m_1\,\vec{v}_1\ +\ m_2\,\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

8 Dynamik des starren Körpers

Die aufgeführten entsprechenden ⟨Formeln⟩ dienen zur Gegenüberstellung von Translations- und Drehbewegung. Entsprechungen elementarer Größen:

$$x \leftrightarrow \varphi\ ,\quad v \leftrightarrow \omega\ ,\quad a \leftrightarrow \alpha\ ,\quad m \leftrightarrow J\ ,\quad p \leftrightarrow L_z\ ,\quad F \leftrightarrow M_z$$

Drehmoment $\quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i\ ,\quad M = r\,F\,\sin\big(\angle\, r, F\big) \qquad [M] = \mathrm{Nm}$

Kreuzprodukt, Rechte-Hand-Regel gilt:
Daumen $\leftrightarrow \vec{r}$, Zeigefinger $\leftrightarrow \vec{F}$, Mittelfinger $\leftrightarrow \vec{M}$

Drehimpuls $\quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \qquad [L] = \dfrac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{Nms}$

$L_z = J\,\omega\ ,\quad \Big\langle p = mv \Big\rangle \qquad L_z$ liegt in Drehachse z

Drehimpulssatz $\quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{L}} = \vec{M} \qquad$ Drehmoment ändert Drehimpuls

Drehimpulserhaltungssatz $\quad \vec{M} = 0 \ \Rightarrow\ \dot{\vec{L}} = 0 \ \Rightarrow\ \vec{L} = \mathrm{const}$

Ohne äußere Kräfte bleibt der Drehimpuls unverändert.

Trägheitsmoment $\quad J = \sum_{i=1}^{n} m_i\,{R_i}^2 \qquad [J] = \mathrm{kg\,m^2}$

R_i Abstand der Einzelmasse m_i zur Drehachse z

kinetische Energie der Drehbewegung $\quad E_K = \dfrac{J}{2}\,\omega^2 \qquad \Big\langle E_K = \dfrac{m}{2}\,v^2 \Big\rangle$

Bewegungsgleichung der Drehbewegung $\quad J\,\alpha = M_z \qquad \Big\langle m\,a = F \Big\rangle$

Drehmomentsarbeit $\quad \mathrm{d}W = M_z\,\mathrm{d}\varphi \qquad \Big\langle \mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}x \Big\rangle$

$$W = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} M_z(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \qquad \left\langle W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,\mathrm{d}x \right\rangle$$

Drehmomentsleistung $\quad P = M_z\,\omega \qquad \Big\langle P = F\,v \Big\rangle$

Satz der Beschleunigungsarbeit $\quad W = \dfrac{J}{2}\,{\omega_B}^2 - \dfrac{J}{2}\,{\omega_A}^2 \Big\langle W = \dfrac{m}{2}\,{v_B}^2 - \dfrac{m}{2}\,{v_A}^2 \Big\rangle$

STEINERsche Satz $\quad J_D = J_S + md^2 \qquad$ Trägheitsmoment für Drehachse z_d

$z_d \parallel z$, $\ d$ ist Abstand von z_d zur Drehachse z im Schwerpunkt S.

Trägheitsmomente

Drehachse im Schwerpunkt, wenn nicht anders angegeben. Außerhalb des Schwerpunkts sind die Trägheitsmomente stets größer (STEINERscher Satz).

Punktmasse $\quad J = m\,R^2 \qquad R:$ Abstand von m zur Drehachse

Hantel $\quad J = \dfrac{m}{2}\,l^2 \qquad l:$ Abstand der beiden Punktmassen m

homogener Stab $\quad \dfrac{m}{12}\,l^2 \qquad l:$ Stablänge

Quader $\quad J_z = \dfrac{1}{12}\,m\,\big(a^2 + b^2\big)\ ,\quad J_y = \dfrac{1}{12}\,m\,\big(a^2 + c^2\big)\ ,\quad J_x = \dfrac{1}{12}\,m\,\big(b^2 + c^2\big)$

a : Länge in Richtung x-Achse, $\ b$: in y-Achse, $\ c$: in z-Achse

homogene Scheibe $\quad J = \dfrac{1}{2}\,m\,r^2$

homogene Kugel $\quad J = \dfrac{2}{5}\,m\,r^2$

Stab, am Ende eingespannt $\quad J_D = \dfrac{1}{3}\,m\,l^2$

phformel, 16. April 2001