

---

# Signale und Systeme 2

Wiedergegeben werden Auszüge der Vorlesung *Signale und Systeme 2* von Prof. Müller-Wichards im Sommersemester 2002 am Fachbereich Elektrotechnik und Informatik der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg (vormals Fachhochschule Hamburg). Die Darstellung erfolgt teilweise vereinfachend. Für die Richtigkeit kann keine Gewähr übernommen werden. Korrekturen sind jederzeit willkommen.

Wird die Schönheit der Systemtheorie deutlich, ist dies ein Verdienst des Dozenten. Ist der Gegenteil der Fall, ist hierfür der Autor dieser Zusammenfassung verantwortlich. Gleiches gilt für die gewählte typografische Darstellung. Mein Dank gilt Jens Prüfer, der den Abschnitt über stochastische Signale und das Beispiel zur diskreten Faltung beigesteuert hat.

Tobias Becker, Juli 2002

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Allgemeine Mathematik</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Allgemeines zu Systemen</b>	<b>4</b>
2.1	Darstellungsformen des Frequenzgangs eines Systems . . . . .	4
2.2	Ideale Systeme . . . . .	5
2.2.1	Verzerrungsfreie Übertragung . . . . .	5
2.2.2	Idealer Tiefpass . . . . .	5
2.2.3	Idealer Bandpass . . . . .	5
2.2.4	Idealer Hochpass . . . . .	6
2.2.5	Idealer Bandsperre . . . . .	6
2.3	Reale Systeme . . . . .	6
2.3.1	Hochpass-Transformation . . . . .	6
2.3.2	Bandpass-Transformation . . . . .	6

---

<b>3</b>	<b>Diskrete Systeme, diskrete Signale, Z-Transformation</b>	<b>7</b>
3.1	Zeitdiskrete Signale . . . . .	7
3.1.1	Spezielle Signale . . . . .	7
3.2	Diskrete Systeme (DS) . . . . .	7
3.3	Diskrete Faltung . . . . .	8
3.4	Z-Transformation . . . . .	9
3.4.1	Eigenschaften der Z-Transformation . . . . .	9
3.4.2	Beispieltransformationen . . . . .	11
3.5	Beschreibung diskreter Systeme . . . . .	11
3.5.1	Differenzgleichung . . . . .	11
3.5.2	Übertragungsfunktion einer Differenzgleichung . . . . .	12
3.5.3	Übertragungsfunktion aus Ein- und Ausgangsfolge . . . . .	12
3.5.4	Sprungantwort . . . . .	12
3.6	Stabilität von diskreten Systemen . . . . .	13
3.7	Frequenzgang eines diskreten System . . . . .	13
3.7.1	FTD-Transformation . . . . .	13
3.7.2	Anmerkungen . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Digitale Filterung</b>	<b>14</b>
4.1	Fourier-Ansatz . . . . .	14
4.2	Nachbildung kontinuierlicher durch diskrete Systeme . . . . .	15
4.2.1	Impulsinvariante Nachbildung . . . . .	15
4.2.2	Sprunginvariante Nachbildung . . . . .	15
4.2.3	Bilineare Substitution . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Diskrete Fourier-Transformation (DFT)</b>	<b>16</b>
5.1	Bestimmung der diskreten Fourier-Koeffizienten . . . . .	16
5.2	Fourier-Matrix . . . . .	17
5.3	Reelle Darstellung der Abtastdaten . . . . .	18
5.4	Diskrete zyklische Faltung . . . . .	18
5.5	Schnelle Fourier-Transformation (FFT) . . . . .	18
5.6	Schnelle Faltung . . . . .	19
5.6.1	Anwendung auf FIR-Filter . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Stochastische Signale</b>	<b>21</b>
6.1	Diskrete Zufallsvariablen . . . . .	21
6.2	Kontinuierliche Zufallsvariablen . . . . .	21

---

# 1 Allgemeine Mathematik

**Summe geometrischer Reihe** mit  $a_{k+1} = q a_k$  und  $a_0 = q^0 = 1$ .

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$|q| < 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

**Cauchy-Produkt von Reihen**

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

**Grenzwerte bei Wurzelausdrücken**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C} = 1 \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

**Partialbruchzerlegung bei konjugiert komplexen Nullstellen**

$$G(s) = \frac{Z(s)}{(s - \lambda)(s - \bar{\lambda})} = \frac{A}{s - \lambda} + \frac{\bar{A}}{s - \bar{\lambda}}$$

**Skalarprodukt im  $\mathbb{C}^N$**

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \bar{y}_i \quad \text{mit } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^N$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2} \quad \text{Länge von } \vec{x}$$

**Skalarprodukt harmonischer Schwingungen**

$$\langle x(t), y(t) \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \overline{y(t)} dt$$

$$\langle e^{jn\omega t}, e^{jm\omega t} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

Diskretisierte harmonische Schwingungen verhalten sich genauso. In diesem Sinne ist eine Funktion ein Vektor mit unendlich vielen Komponenten.

**si- und Si-Funktion** Si = Integralsinus

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \text{si}(u) du \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{Si}(x) = \pm \frac{\pi}{2}$$

## 2 Allgemeines zu Systemen

### 2.1 Darstellungsformen des Frequenzgangs eines Systems

Der Frequenzgang  $H(f)$  eines Systems ist in der Regel eine komplexe Funktion, die unterschiedlich dargestellt wird.

#### 1) Kartesische Darstellung

$$H(f) = R(f) + jI(f)$$

#### 2) Amplituden- und Phasengang häufig als Funktion von $\omega = 2\pi f$

$$H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)} \quad |H(f)|: \text{Amplitudengang}$$

$$\varphi(f) = \arctan \frac{I(f)}{R(f)}: \text{Phasengang}$$

#### 3) Dämpfung und Phase typisch in der Nachrichtentechnik

$$H(f) = e^{-(A(f)+jB(f))} = e^{-A(f)} \cdot e^{-jB(f)} \quad A(f): \text{Dämpfung (Pseudoeinh. Neper)}$$

$$B(f): \text{Phase}$$

$$A(f) = -\ln |H(f)| \quad B(f) = -\varphi(f)$$

#### 4) Dezibel als Dämpfungsmaß Pseudoeinheit Dezibel (dB)

$$|H(f)| = 10^{-\frac{\tilde{A}(f)}{20}} \quad \Rightarrow \tilde{A}(f) = -20 \lg |H(f)| = -20 \lg e \cdot A(f)$$

$|H(f)|$  ist für reelle Signale eine gerade Funktion und  $B(f)$  deshalb eine ungerade.

$$|H(f)| = |H(-f)| \quad B(-f) = -B(f)$$

## 2.2 Ideale Systeme

### 2.2.1 Verzerrungsfreie Übertragung

Eine verzerrungsfreies (ideales) System liegt vor, wenn zwischen Eingangss/Sendesignal  $x(t)$  und Ausgangs/Empfangssignal  $y(t)$  folgende Beziehung besteht (konstante Dämpfung, lineare Phase,  $K$ : Verstärkungsfaktor,  $t_0$ : Laufzeit):

$$\begin{aligned}
 y(t) &= K x(t - t_0) & K > 0, \quad t_0 \geq 0 \\
 \implies H(f) &= \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{x(t)\}} = K e^{-j2\pi f t_0} \\
 A(f) &= -\ln K & B(f) &= 2\pi f t_0
 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Idealer Tiefpass

Der ideale Tiefpass ist nicht kausal und daher nicht realisierbar. Seine Impulsantwort  $h_{TP}(t)$  ist zu  $t_0$  symmetrisch, aber nicht absolut integrierbar, das System daher nicht stabil. Bei großen  $t_0$  ist andererseits die Impulsantwort im nichtkausalen Bereich ( $t < 0$ ) klein und der ideale Tiefpass daher ein brauchbares Modell für reale Tiefpässe.

$$\begin{aligned}
 H_{TP}(f) &= \begin{cases} K e^{-j2\pi f t_0} & \text{für } |f| < f_g \\ 0 & \text{für } |f| > f_g \end{cases} \\
 h_{TP}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_{TP}(f)\} = K 2f_g \operatorname{si}(2\pi f_g(t - t_0)) \\
 y_\varepsilon(t) &= h_{TP}(t) * \varepsilon(t) = \frac{K}{2} + \frac{K}{\pi} \operatorname{Si}(2\pi f_g(t - t_0))
 \end{aligned}$$

Die Einschwingzeit  $T_E$  wird durch die Anstiegsdauer der Tangente an  $y_\varepsilon(t)$  in  $t_0$  von 0 auf  $K$  beschrieben.  $T_E$  ist umso kleiner, je größer die Grenzfrequenz ist.

$$T_E = \frac{1}{2f_g}$$

### 2.2.3 Idealer Bandpass

Der ideale Bandpass wird aus zwei frequenzverschobenen idealen Tiefpässen mit  $f_g = f_2 - f_0$  konstruiert. Sei  $f_1$  die untere und  $f_2$  die obere Grenzfrequenz, dann ist  $f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$  die Mittenfrequenz und  $B = f_2 - f_1$  die Bandbreite.

$$\begin{aligned}
 H_{BP}(f) &= \begin{cases} K e^{-j2\pi f t_0} & \text{für } f_1 < |f| < f_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 H_{BP}(f) &= H_{TP}(f - f_0) e^{-j2\pi f_0 t_0} + H_{TP}(f + f_0) e^{j2\pi f_0 t_0} \\
 h_{BP}(t) &= 2 \cos(2\pi f_0(t - t_0)) \underbrace{K}_{B} \underbrace{2f_g}_{\pi B} \operatorname{si}(2\pi f_g(t - t_0))
 \end{aligned}$$

### 2.2.4 Idealer Hochpass

Der ideale Hochpass ist die Umkehrung des idealen Tiefpasses.

$$H_{HP}(f) = \begin{cases} K e^{-j2\pi f t_0} & \text{für } |f| > f_g \\ 0 & \text{für } |f| < f_g \end{cases}$$

$$H_{HP}(f) = K e^{-j2\pi f t_0} - H_{TP}(f)$$

$$h_{HP}(t) = K \delta_{t_0} - K 2f : g \operatorname{si}(2\pi f_g(t - t_0))$$

$$\varepsilon(t) * h_{HP}(t) = \underbrace{K \varepsilon(t) * \delta_{t_0}}_{K \varepsilon(t-t_0)} - \left( \frac{K}{2} + \frac{K}{\pi} \operatorname{Si}(2\pi f_g(t - t_0)) \right)$$

### 2.2.5 Idealer Bandsperre

Die ideale Bandsperre ist die Umkehrung des idealen Bandpasses.

$$H_{BS}(f) = \begin{cases} 0 & \text{für } f_1 < |f| < f_2 \\ K e^{-j2\pi f t_0} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_{BS}(f) = K e^{-j2\pi f t_0} - H_{BP}(f)$$

$$h_{BS}(t) = K \delta_{t_0} - h_{BP}(t) = K \delta_{t_0} - 2 \cos(2\pi f_0(t - t_0)) K 2f_g \operatorname{si}(2\pi f_g(t - t_0))$$

## 2.3 Reale Systeme

### 2.3.1 Hochpass-Transformation

Sei  $G(s)$  die Übertragungsfunktion eines realen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz  $w_g = 1$ , dann ist  $\widehat{G}(\widehat{s})$  die Übertragungsfunktion eines entsprechenden Hochpasses mit der Grenzfrequenz  $\widehat{w}_g = 1$ .

$$\widehat{G}(\widehat{s}) = G\left(s = \frac{1}{\widehat{s}}\right) \quad \widehat{G}(j\widehat{\omega}) = G\left(j\omega = \frac{1}{j\widehat{\omega}}\right)$$

$$\widehat{G}(0^\pm) = G(\pm j\infty) = 0 \quad \widehat{G}(\pm j\infty) = G(0) = K$$

### 2.3.2 Bandpass-Transformation

Sei  $G(s)$  wieder die Übertragungsfunktion eines realen Tiefpasses mit der Grenzfrequenz  $w_g = 1$ , dann ist  $\widehat{G}(\widehat{s})$  die Übertragungsfunktion eines entsprechenden Bandpasses mit der Mittenfrequenz  $\widehat{w}_g = 1$ .

$$\widehat{G}(\widehat{s}) = G\left(s = \widehat{s} + \frac{1}{\widehat{s}}\right) \quad \widehat{G}(j\widehat{\omega}) = G\left(j\omega = j\widehat{\omega} + \frac{1}{j\widehat{\omega}}\right) = G\left(j\omega = j\frac{\widehat{\omega}^2 - 1}{\widehat{\omega}}\right)$$

$$\widehat{G}(\widehat{\omega} = \pm 1) = G(\omega = 0) = K$$

$$\widehat{G}(0^\pm) = G(\mp j\infty) = 0 \quad \widehat{G}(\pm j\infty) = G(\pm j\infty) = 0$$

Für einen Bandpass mit der Mittenfrequenz  $\omega_0$  ergibt sich:

$$\widehat{G}(\widehat{s}) = G\left(s = \widehat{s} + \frac{\omega_0^2}{\widehat{s}}\right) \quad \widehat{G}(j\widehat{\omega}) = G\left(j\omega = j\widehat{\omega} + \frac{\omega_0^2}{j\widehat{\omega}}\right) = G\left(j\omega = j\frac{\widehat{\omega}^2 - \omega_0^2}{\widehat{\omega}}\right)$$

---

## 3 Diskrete Systeme, diskrete Signale, Z-Transformation

### 3.1 Zeitdiskrete Signale

Sei  $x(t)$  ein herkömmliches, d. h. zeitkontinuierliches Signal. Dann entsteht das zugehörige diskrete Signal  $x[n]$  durch Abtastung von  $x(t)$  im Intervall  $T_a$ .

$$x_n = x[n] = x(nT_a) = D_{T_a}\{x(t)\}$$

$x[n]$  bezeichnet im allgemeinen die gesamte Wertefolge, nicht den  $n$ -ten Wert. Bei den üblichen kausalen Signalen ist  $x[i] = 0$  für  $i < 0$ .

#### 3.1.1 Spezielle Signale

##### 1) diskreter Einheitsimpuls $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verschiebung um  $i_0$  (mit positiven  $i_0$  nach rechts):

$$\delta[n - i_0] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = i_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

##### 2) diskrete Sprungfunktionen $s[n]$ oder auch $\varepsilon[n]$ .

$$s[n] = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0 \\ 1 & \text{für } n \geq 0 \end{cases}$$
$$\delta[n] = s[n] - s[n - 1]$$

### 3.2 Diskrete Systeme (DS)

Schematische Darstellung:  $x[n] \rightarrow \boxed{DS} \rightarrow y[n]$

Diskrete Systeme (DS) reagieren auf Änderungen des Eingangssignal nur zu den Zeitpunkten  $n \cdot T_a$ . Daher ist für die Betrachtung unerheblich, ob das Eingangssignal eine diskrete Wertefolge  $x[n]$  oder die kontinuierliche Haltefunktion  $x_h(t)$  davon ist.

**Linearität** des DS wird vorausgesetzt.

$$\text{Wenn } x_1[n] \rightarrow \boxed{DS} \rightarrow y_1[n]$$

$$\text{und } x_2[n] \rightarrow \boxed{DS} \rightarrow y_2[n]$$

$$\text{dann } \lambda x_1[n] + \mu x_2[n] \rightarrow \boxed{DS} \rightarrow \lambda y_1[n] + \mu y_2[n].$$

**Zeitinvarianz** wird ebenfalls vorausgesetzt.

$$\text{Wenn } x[n] \rightarrow \boxed{DS} \rightarrow y[n]$$

$$\text{dann } x[n - i] \rightarrow \boxed{DS} \rightarrow y[n - i].$$

**Impulsantwort als Systembeschreibung** Ist die Impulsantwort  $g[n]$  ab einem gewissen  $n$  immer 0, spricht man von einem FIR-System (finite impulse response)

$$x[n] = \delta[n] \quad \boxed{DS} \quad y[n] = g[n]$$

### 3.3 Diskrete Faltung

Seien  $x[n]$  und  $y[n]$  kausale Signale, dann ist die diskrete Faltung wie folgt definiert:

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{i=0}^n x[i]y[n-i]$$

Ist  $g[n]$  die Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten diskreten Systems, so kann für jedes beliebige Eingangssignal  $x[n]$  das Ausgangssignal  $y[n]$  über die diskrete Faltung mit der Impulsantwort  $g[n]$  berechnet werden:

$$y[n] = x[n] * g[n]$$

Für die Faltung mit dem Einheitsimpuls gilt:

$$x[n] * \delta[n - k_0] = x[n - k_0]$$

Da das Konzept der Faltung immer wieder zu Verständnisproblemen führt und die Einführung sehr formal mathematisch erfolgt, soll hier ein konkretes, einfaches, numerisches Beispiel durchgerechnet werden. Wichtig ist, dabei immer im Auge zu behalten, dass man es in der Praxis stets mit endlichen Zahlenfolgen zu tun hat, die nach endlicher Rechnerei zu einer neuen Zahlenfolge verknüpft werden.

**Aufgabe 1.** Gegeben seien die Eingangsfolge  $x[n] = \{1, 1, 1, 1\}$  und die Impulsantwort  $g[n] = \{1, 2, 3\}$  eines FIR-Filters. Berechnen Sie die Ausgangsfolge mit Hilfe der diskreten Faltung.

**Lösung:** Mit Hilfe der Definition der Faltungssumme erhält man schnell

$$y[n] = \sum_{i=0}^n x[i]g[n-i]$$

Für die konkreten Werte folgt

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0]g[0-0] + x[1]g[0-1] + x[2]g[0-2] + x[3]g[0-3] \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[1] &= x[0]g[1-0] + x[1]g[1-1] + x[2]g[1-2] + x[3]g[1-3] \\ &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[2] &= x[0]g[2-0] + x[1]g[2-1] + x[2]g[2-2] + x[3]g[2-3] \\ &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= x[0]g[3-0] + x[1]g[3-1] + x[2]g[3-2] + x[3]g[3-3] \\ &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[4] &= x[0]g[4-0] + x[1]g[4-1] + x[2]g[4-2] + x[3]g[4-3] \\ &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[5] &= x[0]g[5-0] + x[1]g[5-1] + x[2]g[5-2] + x[3]g[5-3] \\ &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3 \end{aligned}$$

Zunächst sieht man, dass die Faltung auch nur eine endliche Summe von einfachen Produkten ist und nichts besonders kompliziertes. Ferner sieht man, dass es ein  $y[6]$  nicht mehr geben kann, da die  $g[n-i]$  stets 0 ergeben würden ( $g[6-3] = g[3]$  ist der kleinste Wert und ebenfalls bereits 0). Wenn  $P$  und  $Q$  die Anzahl der Elemente in den zu faltenden Folgen sind, dann muss allgemein die Summe bis zur Grenze  $P+Q-2$  berechnet werden. In unserem Beispiel ist  $P=4$ ,  $Q=3$ ,  $P+Q-2=5$ . Für die Faltungssumme kann man also auch schreiben:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{P+Q-2} x[i]g[n-i] \quad \text{mit } P = \text{Anz}(x[n]), \quad Q = \text{Anz}(g[n]).$$

Die Summenrechnung lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0]g[0] + x[1]g[-1] + x[2]g[-2] + x[3]g[-3] \\ y[1] &= x[0]g[1] + x[1]g[0] + x[2]g[-1] + x[3]g[-2] \\ y[2] &= x[0]g[2] + x[1]g[1] + x[2]g[0] + x[3]g[-1] \\ y[3] &= x[0]g[3] + x[1]g[2] + x[2]g[1] + x[3]g[0] \\ y[4] &= x[0]g[4] + x[1]g[3] + x[2]g[2] + x[3]g[1] \\ y[5] &= x[0]g[5] + x[1]g[4] + x[2]g[3] + x[3]g[2] \end{aligned}$$

Hier sieht man, dass der Laufindex der Folge  $x[n]$  in jeder Zeile wächst, während der Index von  $g[n]$  fällt. Man kann eine neue Folge  $g[-n]$  einführen, die der gespiegelten ursprünglichen Folge entspricht.

Wenn man sich das grafisch in Abbildung 1 auf Seite 10 anschaut, erkennt man auch, woher die Faltung ihren Namen hat: Zunächst wird  $g[n]$  zu  $g[-n]$  gespiegelt – sozusagen einmal bei 0 gefaltet. Anschließend wird  $g[-n]$  über  $x[n]$  geschoben und nach jeder Schiebung  $y[n]$  als Summe über alle Produkte aus Termen  $g[-n]$  und  $x[n]$  gebildet. Nach 6 Schritten verlässt  $g[-n]$  wieder den Bereich von  $x[n]$ , die Faltung ist beendet.

### 3.4 Z-Transformation

Aus Anwendung der Laplace-Transformation auf die Haltefunktion  $x_h(t)$  entsteht die Z-Transformation. Sie ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x[n]\} &:= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ z &= e^{sT_a}, \quad z^n = e^{snT_a}, \quad z^{-n} = e^{-snT_a} \\ x[n] &\circ\!\!\!\rightarrow X(z) \end{aligned}$$

Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$  konvergiert außerhalb eines Kreises mit dem Radius  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[n]|}$ . Für endliches  $R$  und somit Vorhandensein von Konvergenz muss gelten:  $|x[n]| \leq M^n$ .

#### 3.4.1 Eigenschaften der Z-Transformation

Es gilt jeweils  $x_i[n] \circ\!\!\!\rightarrow X_i(z)$ .

##### 1) Linearität

$$\lambda x_1[n] + \mu x_2[n] \quad \circ\!\!\!\rightarrow \quad \lambda X_1(z) + \mu X_2(z)$$

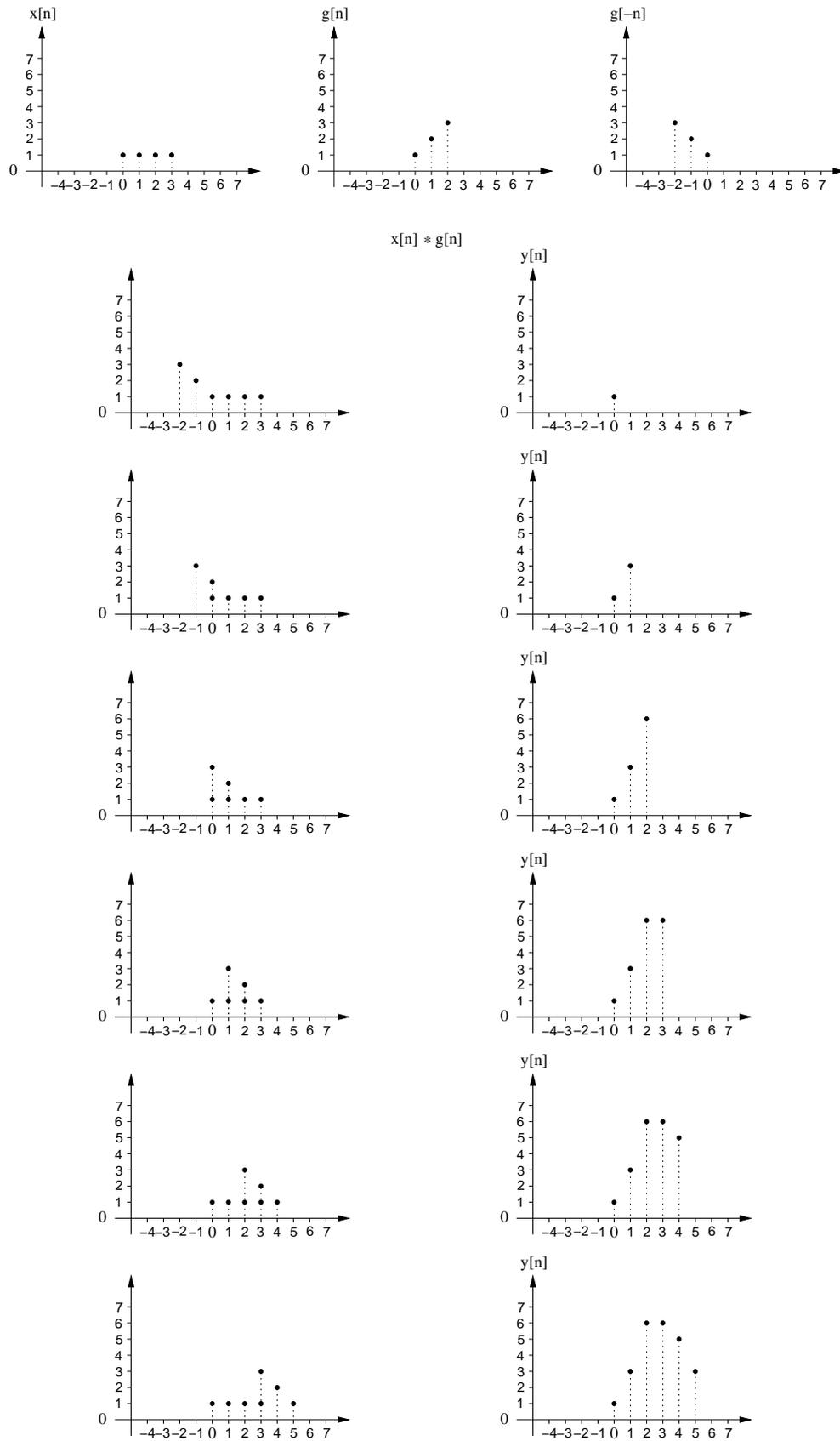


Abbildung 1: Faltung  $y[n] = x[n] * g[n]$  grafisch dargestellt

**2) Verschiebungssatz**

$$x[n - k] \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X(z) z^{-k}, \quad k \geq 0$$

**3) Faltungssatz**

$$x_1[n] * x_2[n] \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad X_1(z) \cdot X_2(z)$$

**4) Übertragungsfunktion eines DS** mit der Impulsantwort  $g[n] \circ \longrightarrow \bullet G(z)$ 

$$y[n] = x[n] * g[n] \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad Y(z) = X(z) G(z) \quad G(z): \text{Übertragungsfunktion}$$

**5) Differentiationssatz**

$$n x[n] \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad -z X'(z)$$

**3.4.2 Beispieltransformationen**

$$\begin{aligned} \delta[n] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad 1 \\ \delta[n - k] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad z^{-k} \\ s[n] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{z}{z - 1} \quad \text{sofern } \frac{1}{|z|} < 1 \\ a^n s[n] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{z}{z - a} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} \quad \text{für } |a| < |z| \text{ bzw. } \left| \frac{a}{z} \right| < 1 \\ n s[n] a^n &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{z a}{(z - a)^2} \\ a^{n-1} s[n - 1] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{z - a} \\ n a^{n-1} s[n - 1] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{z}{(z - a)^2} \\ (n - 1) a^{n-2} s[n - 1] \\ = (n - 1) a^{n-2} s[n - 2] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{(z - a)^2} \\ \binom{n - 1}{k - 1} a^{n-k} s[n - k] &\quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{1}{(z - a)^k} \end{aligned}$$

**3.5 Beschreibung diskreter Systeme****3.5.1 Differenzgleichung**

Behandelt werden hier nur lineare Differenzgleichungen,  $x$  und  $y$  erscheinen nur in erster Potenz.

$$\begin{aligned} y[n] &= b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + \dots + b_N x[n - N] + a_1 y[n - 1] + \dots + a_M y[n - M] \\ y[n] &= \sum_{i=0}^N b_i x[n - i] + \sum_{i=1}^M a_i y[n - i] \end{aligned}$$

Der Ausgangswert  $y[n]$  ist abhängig von dem aktuellen Eingangswert, von früheren Eingangswerten und von früheren Ausgangswerten, nicht aber von späteren Werten. Dies ist ein Merkmal kausaler Systeme.

### 3.5.2 Übertragungsfunktion einer Differenzgleichung

Für die obige Differenzgleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion nach

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}} \\
 &= \frac{z^M}{\underbrace{z^N}_{z^{M-N}}} \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{N-i}}{z^M - \sum_{i=1}^M a_i z^{M-i}}
 \end{aligned}$$

1. Fall  $M \geq N$ : höchste Potenz im Zähler:  $z^{M-N} b_0 z^N = b_0 z^M$   
höchste Potenz im Nenner:  $z^M$   
 $\leadsto$  Zählergrad  $\leq$  Nennergrad (gleich für  $b_0 \neq 0$ )
2. Fall  $M < N$ : höchste Potenz im Zähler:  $b_0 z^N$   
höchste Potenz im Nenner:  $z^M z^{N-M} = z^N$   
 $\leadsto$  Zählergrad  $\leq$  Nennergrad (gleich für  $b_0 \neq 0$ )

Die Zuordnung zwischen Differenzgleichung und Übertragungsfunktion ist nicht eindeutig. Bei teilerfremder Darstellung der Übertragungsfunktion entsteht eine minimale Differenzgleichung.

### 3.5.3 Übertragungsfunktion aus Ein- und Ausgangsfolge

Ist bei einem diskreten System zu einer Eingangsfolge  $x[n]$  die zugehörige Ausgangsfolge  $y[n]$  bekannt, lassen sich mit Hilfe der Z-Transformation Übertragungsfunktion  $G(z)$  und Impulsantwort  $g[n]$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
 x[n] &\xrightarrow{\boxed{DS}} y[n] \\
 x[n] &\circ\!\!\!\rightarrow X(z), \quad y[n] \circ\!\!\!\rightarrow Y(z) \\
 Y(z) &= G(z)X(z) \quad \implies \quad G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \\
 g[n] &\circ\!\!\!\rightarrow G(z)
 \end{aligned}$$

### 3.5.4 Sprungantwort

Es besteht ein Zusammenhang zur Impulsantwort  $g[n]$ .

$$\begin{aligned}
 s[n] &\xrightarrow{\boxed{DS}} y[n] \\
 y[n] &= s[n] * g[n] = \sum_{k=0}^n g[k]
 \end{aligned}$$

### 3.6 Stabilität von diskreten Systemen

Ein diskretes lineares zeitinvariantes System heißt *BIBO-stabil* (bounded input – bounded output), wenn jedes beschränkte Eingangssignal  $x[n]$  ein beschränktes Ausgangssignal  $y[n]$  erzeugt.

Ein diskretes System (LTI) ist BIBO-stabil, wenn gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |g[n]| < \infty \quad \text{„absolut summierbar“.}$$

Dies ist der Fall, wenn sämtliche Pole der Übertragungsfunktion im Inneren des Einheitskreises liegen. In diesem Fall ergibt eine Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion nur Faktoren der Form:

$$\frac{A_n}{z - \lambda_n} \quad \text{mit } |\lambda_n| < 1$$

### 3.7 Frequenzgang eines diskreten System

Betrachtet wird die Antwort eines diskreten Systems auf eine mit Abstand  $T_a$  diskretisierte harmonische Schwingung. Voraussetzung ist ein BIBO-stabiles System.

$$x[n] = e^{j2\pi f n T_a} \quad \text{für } n \geq 0$$

Der Frequenzgang  $H(f)$  ist periodische Funktion im Frequenzbereich mit der Periode  $\frac{1}{T_a}$ . Er entsteht wie folgt aus der Übertragungsfunktion  $G(z)$ :

$$H(f) = G\left(z = e^{j2\pi f T_a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] e^{-j2\pi f T_a k} = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] \left(e^{-j2\pi f T_a}\right)^k$$

$$H\left(f + \frac{1}{T_a}\right) = H(f)$$

Für große  $n$  und  $f$  als Frequenz der harmonischen Eingangsschwingung gilt:

$$y[n] \approx x[n] \cdot H(f)$$

#### 3.7.1 FTD-Transformation

Allgemein kann einer summierbaren Wertefolge  $x[n]$  eine Frequenzfunktion zugeordnet werden, wobei ein Zusammenhang zum Frequenzgang und zur Z-Transformation auf dem Rand des Einheitskreises besteht.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x[k] < \infty$$

$$x[n] \circ \text{FTD}\{x[n]\} = X_D(f) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] e^{-j2\pi f k T_a}$$

$$H(f) = G\left(z = e^{j2\pi f T_a}\right) = \text{FTD}\{g[n]\}$$

### 3.7.2 Anmerkungen

Bei kontinuierlichen Systemen entspricht der Frequenzgang der Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse. Bei diskreten Systemen entspricht der Frequenzgang der Übertragungsfunktion auf dem Rand des Einheitskreises.

Ein diskretes Zeitsignal erhält mittels der Z-Transformation ein kontinuierliches, periodisches Spektrum. Ein kontinuierliches, periodisches Zeitsignal erhält als Fourier-Reihe ein diskretes Spektrum.

## 4 Digitale Filterung

### 4.1 Fourier-Ansatz

Sei  $K(f)$  eine vorgegebene Frequenzfunktion (Frequenzgang) mit der Periode  $f_a$  und der Frequenz  $T_a$ , dann ist ein diskretes System mit der Impulsantwort  $g[n]$  und der Übertragungsfunktion  $G(z)$  zur Filterung so zu entwerfen, dass sein Frequenzgang  $H(f)$  mit der Vorgabe  $K(f)$  möglichst gut übereinstimmt.

$$\begin{aligned}
 K(f) &\sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk \frac{2\pi}{f_a} f}, & \omega_a &= \frac{2\pi}{f_a} \\
 \alpha_k &= \frac{1}{f_a} \int_{-\frac{f_a}{2}}^{\frac{f_a}{2}} K(f) e^{-jk \frac{2\pi}{f_a} f} df \\
 K_m(f) &= \sum_{k=-m}^m \alpha_k e^{jk \frac{2\pi}{f_a} f} && \text{m-te Teilsumme} \\
 g[n] &= \alpha_{m-n} && \text{für } n = 0 \dots 2m \\
 G(z) &= \sum_{i=0}^{2m} g[i] z^{-i} \\
 H(f) &= G\left(z = e^{j \frac{2\pi}{f_a} f}\right)
 \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion in Form eines Polynom von  $z^{-1}$  entspricht einer Differenzgleichung ohne Verwendung von Ausgangssignalen und verdeutlicht das Vorliegen eines FIR-Filters.

## 4.2 Nachbildung kontinuierlicher durch diskrete Systeme

### 4.2.1 Impulsinvariante Nachbildung

$$\begin{array}{ccc}
 x_d(t) & \longrightarrow & \boxed{\text{CS: } g(t), G_C(s)} \longrightarrow y(t) \\
 D_{T_a} \downarrow & & D_{T_a} \downarrow \\
 T_a x[n] & \longrightarrow & \boxed{\text{DS: } h[n], G_D(z)} \longrightarrow y[n]
 \end{array}$$

Aus dem Eingangssignal  $x_d(t)$ , bestehend aus gewichteten Diracimpulsen im Abstand  $T_a$ , soll unabhängig davon, ob die Diskretisierung  $D_{T_a}$  vor oder nach dem Durchlauf durch das diskrete oder kontinuierliche System (DS oder CS) erfolgt, das selbe diskrete Ausgangssignal  $y[n]$  entstehen. Bei festgelegten  $g(t)$  ist  $h[n]$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 x_d(t) &= T_a \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_a) \delta_{kT_a} \\
 h[n] &= g(nT_a) = D_{T_a} \{g(t)\} \\
 G_D(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \underbrace{D_{T_a} \left\{ \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{G_C(s)\}}_{g(t)} \right\}}_{g[n]} \right\}
 \end{aligned}$$

### 4.2.2 Sprunginvariante Nachbildung

$$\begin{array}{ccc}
 x_h(t) & \longrightarrow & \boxed{\text{CS: } g(t), G_C(s)} \longrightarrow y(t) \\
 D_{T_a} \downarrow & & D_{T_a} \downarrow \\
 x[n] & \longrightarrow & \boxed{\text{DS: } h[n], G_D(z)} \longrightarrow y[n]
 \end{array}$$

Bei der sprunginvarianten Nachbildung ist das Eingangssignal  $x_h(t)$  eine Halte- oder Treppenfunktion. Wiederum soll bei beiden Signalpfaden das selbe Ausgangssignal  $y[n]$  entstehen.

$$\begin{aligned}
 x_h(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_a) r(t - kT_a) \quad \text{mit } r(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_a) \\
 v(t) &= g(t) * \epsilon(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad \text{Sprungantwort kontinuierliches System} \\
 v[n] &= D_{T_a} \{v(t)\} \quad \text{Sprungantwort diskretes System (DS)} \\
 h[n] &= v[n] - v[n-1] = v[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\
 G_D(z) &= \mathcal{Z}\{h[n]\} = \mathcal{Z} \left\{ D_{T_a} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_C(s)}{s} \right\} \right\} \right\} \left( 1 - \frac{1}{z} \right)
 \end{aligned}$$

### 4.2.3 Bilineare Substitution

Jedes kontinuierliche System lässt sich als Netzwerk von I-Gliedern mit der Übertragungsfunktion  $\frac{1}{s}$  darstellen. Bei der bilinearen Substitution wird die ideale kontinuierliche Integration entsprechend der Trapezregel der numerischen Integration diskret angenähert. Solch einem diskreten Integrator wird die Übertragungsfunktion  $T(z)$  zugeordnet, die die idealen kontinuierlichen Integratoren ersetzt.

$$\begin{aligned} y[n] &= y[n-1] + \frac{T_a}{2}(x[n] + x[n-1]) \\ T(z) &= \frac{T_a}{2} \frac{z+1}{z-1} \\ G_D(z) &= G_C\left(s = \frac{1}{T(z)}\right) = G_C\left(s = \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1}\right) \end{aligned}$$

Diese Transformation bildet den Einheitskreis der  $z$ -Ebene auf die imaginäre Achse der  $s$ -Ebene und das Innere des Einheitskreises auf die linke Halbebene der  $s$ -Ebene ab. Als Folge gehen BIBO-stabile kontinuierliche Systeme in BIBO-stabile diskrete Systeme über. Die bilineare Substitution erfordert keine bandbegrenzten Signale und ist daher allgemeiner.

Bei der bilinearen Substitution kommt es zu einer **nichtlinearen Verformung** (Warping) der  $\omega$ -Achse, die eine Frequenzumrechnung erfordert:

$$\begin{aligned} G_C(s = j\hat{\omega}) &: \text{Frequenzgang des kontinuierlichen Systems} \\ G_D(z = e^{j\omega T_a}) &: \text{Frequenzgang des diskreten Systems} \\ \hat{\omega} &= \frac{2}{T_a} \tan\left(\omega \frac{T_a}{2}\right) \end{aligned}$$

Soll ein diskretes System die Eckfrequenz  $\omega_c$  erhalten und aus einem kontinuierlichen System mit dieser Eckfrequenz mittels bilinearer Substitution abgeleitet werden, so ist vor der Umwandlung in  $G_C(s)$ , der kontinuierlichen Übertragungsfunktion,  $s$  durch  $\frac{s}{\hat{\omega}_c}$  zu ersetzen. Dieser Vorgang wird als Vorverformung oder Prewarping bezeichnet.

## 5 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

### 5.1 Bestimmung der diskreten Fourier-Koeffizienten

Sei  $x(t)$  ein periodisches Signal mit der Periode  $T$ , d. h.  $x(t+T) = x(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Sei ferner  $N \in \mathbb{N}$  als Anzahl der Abtastungen je Periode gegeben. Dann ist  $\vec{x}$  der Vektor mit den Abtastwerten einer Periode.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \vdots \\ x(t_{N-1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N; \quad t_k = kh; \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad h = \frac{T}{N}$$

Zur Untersuchung der in  $\vec{x}$  enthaltenen Frequenzen werden harmonische Schwingungen ebenfalls abgetastet, die feierlich gesprochen eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{C}^N$  bilden.

$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} e^{jn\omega t_0} \\ e^{jn\omega t_1} \\ \vdots \\ e^{jn\omega t_{N-1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad t_k \text{ wie oben}$$

Ziel ist es,  $\vec{x}$  als Linearkombination der  $\vec{v}_n$  auszudrücken. Dazu sind die Koeffizienten  $c_l$  zu bestimmen.

$$\vec{x} = \sum_{l=0}^{N-1} c_l \vec{v}_l, \quad \text{bzw. } x(t_k) = \sum_{l=0}^{N-1} c_l e^{j\omega t_k}$$

$$c_n = \langle \vec{x}, \vec{v}_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-jn\omega t_k}$$

$$\vec{c} = \text{DFT}\{\vec{x}\} = \vec{X}$$

Die Berechnungsformel für die  $c_l$  läßt sich als numerische Näherung nach der Rechteck- und der Trapezregel für die Koeffizienten  $\alpha_k$  der kontinuierlichen Fourierreihe auffassen. Allgemeiner ausgedrückt ist die DFT eine numerische Näherung der Bestimmung der Fourierkoeffizienten.

$$\alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{jn\omega t} dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} h \sum_{k=0}^{N-1} x(kh) e^{-jn\omega kh} \quad \text{Rechteckregel}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{h}{2} \left( x(0) + x(T) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} x(kh) e^{-jn\omega kh} \right) \quad \text{Trapezregel}$$

## 5.2 Fourier-Matrix

Die Beziehung zwischen dem abgetasteten Signal  $\vec{x}$  und den diskreten Fourier-Koeffizienten läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\vec{c} = D\vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\omega t_0} & e^{-j\omega t_1} & e^{-j\omega t_2} & \dots & e^{-j\omega t_{N-1}} \\ e^{-j2\omega t_0} & e^{-j2\omega t_1} & e^{-j2\omega t_2} & \dots & e^{-j2\omega t_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(N-1)\omega t_0} & e^{-j(N-1)\omega t_1} & e^{-j(N-1)\omega t_2} & \dots & e^{-j(N-1)\omega t_{N-1}} \end{pmatrix}}_{\text{Fourier-Matrix } D} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = D^{-1}\vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & e^{j\omega t_0} & e^{j2\omega t_0} & \dots & e^{j(N-1)\omega t_0} \\ 1 & e^{j\omega t_1} & e^{j2\omega t_1} & \dots & e^{j(N-1)\omega t_1} \\ 1 & e^{j\omega t_2} & e^{j2\omega t_2} & \dots & e^{j(N-1)\omega t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\omega t_{N-1}} & e^{j2\omega t_{N-1}} & \dots & e^{j(N-1)\omega t_{N-1}} \end{pmatrix}}_{D^{-1}, \text{ dies ist nicht inverse Matrix von } D} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

### 5.3 Reelle Darstellung der Abtastdaten

Es stellt sich heraus, dass nur  $\frac{N}{2}$ -Frequenzen vertreten sind. Anders gesagt werden wenigstens 2 Punkte einer vollen Schwingung benötigt, um diese aufzulösen. Die obere Hälfte der Frequenzen von  $\vec{v}_n$  trägt sozusagen die Phasen- und Amplitudeninformationen für die untere Hälfte.

$$\begin{aligned}
 x(t_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{jn\omega t_k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad N \text{ gerade}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\
 c_{N-n} &= \overline{c_n} \quad \implies c_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{R} \\
 x(t_k) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} (A_n \cos(n\omega t_k) + B_n \sin(n\omega t_k)) + c_{\frac{N}{2}} (-1)^k \\
 c_n &= \frac{1}{2}(A_n - jB_n), \quad e^{j\frac{N}{2}\omega t_k} = e^{j\frac{N}{2} \frac{2\pi}{T} k \frac{T}{N}} = (-1)^k
 \end{aligned}$$

### 5.4 Diskrete zyklische Faltung

Seien  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  die äquidistante Abtastungen der periodischer Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  mit der Periode  $T$  im Abstand  $h$ , d. h.  $x_n = x(nh)$  und  $y_n = y(nh)$ , dann ist  $\vec{z}$  als diskretes zyklisches Faltungsprodukt definiert und es gibt einen Faltungssatz:

$$\begin{aligned}
 \vec{z} &= \vec{x} * \vec{y} \\
 z_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k}
 \end{aligned}$$

$$\text{DFT}\{\vec{x} * \vec{y}\} = \text{DFT}\{\vec{x}\} \circ \text{DFT}\{\vec{y}\} \quad (\circ: \text{elementweise Multiplikation})$$

Die diskrete zyklische Faltung ist insbesondere bei diskreten Systemen von Interesse. Hier stellt  $\vec{x}$  das Eingangssignal,  $\vec{y}$  die Impulsantwort und  $\vec{z}$  das Ausgangssignal. Ist  $\vec{x}$  nicht periodisch, wird seine Periode  $T$ , die auch für zwangsweise periodischen Mustersignale  $\vec{v}_n$  gilt, hinreichend groß gewählt.

Die diskrete zyklische Faltung läßt sich auch in Matrixform notieren:

$$\begin{aligned}
 \vec{z} &= \frac{1}{N} C \vec{x} \\
 \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{N} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_{N-1} & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix}}_{\text{Zirkulante } C} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### 5.5 Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Die naive Realisierung der DFT erzeugt einen Rechenaufwand von  $O(N^2)$ . Mit Hilfe einer geschickteren Strategie, die auf einer fortschreitenden Halbierung der Datensatzlänge beruht, läßt sich eine Reduzierung auf  $O(N \log_2 N)$  erzielen.

Im folgenden wird kurz der Algorithmus von Saude und Tukey vorgestellt. Für weitere Informationen siehe die Vorlesungsmitschrift vom 15. Mai 2002 oder *Transformationen und Signale* ab Seite 194.

$N = 2^n$	Länge Anfangsdatensatz
$m = 0, 1, \dots, n - 1$	Stufe des Rechenverfahrens $2^m$ Datensätze in der $m$ -ten Stufe
$r = \frac{N}{2^m} = 2^{n-m}$	Datensatzlänge in der $m$ -ten Stufe
$l = 0, 1, \dots, 2^m - 1$	Laufindex Datensätze
$k = 0, 1, \dots, \frac{r}{2} - 1$	Laufindex Hälfte eines Datensatz
$x_k^{(0)} = x_k$	Initialisierung, $k = 0, 1, \dots, N - 1$
$x_{lr+k}^{(m+1)} = x_{lr+k}^{(m)} + x_{lr+\frac{r}{2}+k}^{(m)}$	
$x_{lr+\frac{r}{2}+k}^{(m+1)} = \left( x_{lr+k}^{(m)} - x_{lr+\frac{r}{2}+k}^{(m)} \right) e^{-jk\frac{2\pi}{N}}$	
$\vec{x}^{(n)} = \text{FFT}\{\vec{x}\}$	

Das Ergebnis  $\vec{x}^{(n)}$  der FFT liegt in einer bit-permutierten Reihenfolge vor. Das endgültige, mit der DFT identische, Ergebnis,  $\vec{X}$ , erhält man durch Bitspiegelung. (Hinweis: Die Funktionen `fft` und `ifft` in Matlab beinhalten bereits die R-Transformation zur Bitspiegelung und können daher direkt anstelle der DFT eingesetzt werden.)

$$\vec{X} = \text{R}\{\vec{x}^{(n)}\} = \text{R}\{\text{FFT}\{\vec{x}\}\} = \text{DFT}\{\vec{x}\}$$

$$X_{k'} = x_k^{(n)} \quad k', k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$k = (d_{n-1} \ d_{n-2} \ \dots \ d_1 \ d_0) \quad d_i: \text{Ziffern im Dualsystem}$$

$$k' = (d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{n-2} \ d_{n-1})$$

Die Rücktransformation  $\text{FFT}^{-1}$  läßt sich mit dem FFT Algorithmus durchführen. Hierbei liegen die Quelldaten in Form der diskreten Fourier-Koeffizienten  $\vec{X}$  in richtiger Reihenfolge vor, während die resultierende Zeitfunktion  $\vec{x}'$  wiederum in bit-permutierter Reihenfolge erscheint.

$$\text{R}\{\vec{x}'\} = \vec{x}' = \text{FFT}^{-1}\{\vec{X}\} = \text{FFT}\{\overline{\vec{X}}\}$$

## 5.6 Schnelle Faltung

Die diskrete zyklische Faltung wird durch Anwendung der FFT zur schnellen Faltung. Der Rechenaufwand verringert sich von  $O(N^2)$  auf  $O(N \cdot \log_2 N)$ .

$$\vec{z} = \vec{x} * \vec{y}$$

$$\vec{z} = \text{DFT}^{-1}\{\text{DFT}\{\vec{x}\} \cdot \text{DFT}\{\vec{y}\}\}$$

$$\text{R}\{\vec{z}\} = \text{FFT}^{-1}\{\text{R}\{\text{FFT}\{\vec{x}\} \cdot \text{FFT}\{\vec{y}\}\}\}$$

### 5.6.1 Anwendung auf FIR-Filter

Das Ausgangssignal eines FIR-Filters kann über die Faltung berechnet werden. Indem alle beteiligten drei Datenvektoren  $\vec{x}$ ,  $\vec{g}$  und  $\vec{y}$  durch Auffüllen mit Nullen auf gleiche Länge gebracht werden, läßt sich die zyklische Faltung anwenden. Ist die Elementzahl zudem eine Zweierpotenz, kann die zyklische Faltung mittels der FFT realisiert werden, was einen wünschenswerten Geschwindigkeitsvorteil erzielt.

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i} && \text{nichtrekursive Differenzgleichung} \\
 g_i &= b_i && \text{für } i = 0, 1, \dots, N \\
 y_n &= \sum_{k=0}^n g_k x_{n-k} && \text{allgemeine Faltungsvorschrift} \\
 y_n &= \sum_{k=\max(0, n-M)}^{\min(n, N)} g_k x_{n-k} && \text{reduzierte Summe für endliche} \\
 &&& \text{Eingangsdaten } x_0, x_1, \dots, x_M \text{ und} \\
 &&& \text{Sprungantwort } g_0, g_1, \dots, g_N \\
 K &= M + N + 1 && \text{Anzahl Ausgangsdaten: } y_0, y_1, \dots, y_{K-1} \\
 L &= 2^l \geq K && \text{resultierende minimale Datenanzahl} \\
 \hat{x}_k &= \begin{cases} x_k & k = 0, 1, \dots, N \\ 0 & k = N + 1, \dots, L - 1 \end{cases} \\
 \hat{g}_k &= \begin{cases} g_k & k = 0, 1, \dots, M \\ 0 & k = M + 1, \dots, L - 1 \end{cases} \\
 \hat{y}_k &= \frac{1}{L} \begin{cases} y_k & k = 0, 1, \dots, K - 1 \\ 0 & k = K, K + 1, \dots, L - 1 \end{cases} \\
 \hat{y} &= \hat{x} * \hat{g} && \text{zyklische Faltung}
 \end{aligned}$$

Darstellung der zyklischen Faltung in Matrixenform. Die Vektoren haben jeweils  $L$  Elemente, die Zirkulante ist eine  $L \times L$ -Matrix.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{K-1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g_N & g_{N-1} & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g_N & \cdots & g_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & \cdots & g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & g_N \\ g_N & g_{N-1} & \cdots & g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & g_N & g_{N-1} & \cdots & g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_N & g_{N-1} & \cdots & g_1 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_N & g_{N-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

## 6 Stochastische Signale

Da das Thema “Stochastische Signale” erst gegen Ende der Vorlesung unter großem Zeitdruck behandelt wurde, gab es im wesentlichen nur eine größere Zahl von Definitionen. An dieser Stelle sollen alle wichtigen Größen sowohl für diskrete (Würfeln) als auch kontinuierliche (Störungen bei Signalübertragung) Zufallsprozesse noch einmal zusammengetragen werden.

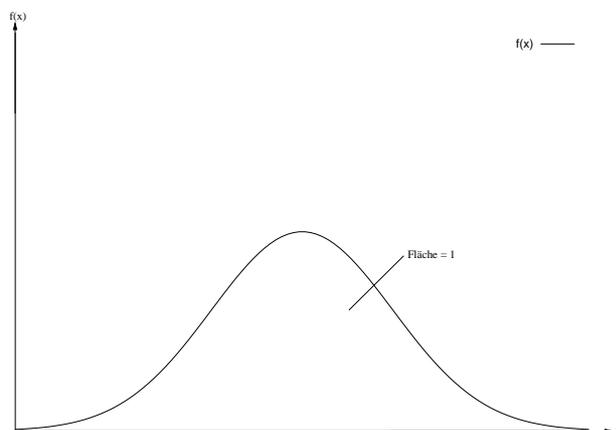
### 6.1 Diskrete Zufallsvariablen

### 6.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

Gegeben sei eine kontinuierliche Verteilungsfunktion  $F(x) = P(X \leq x)$ .

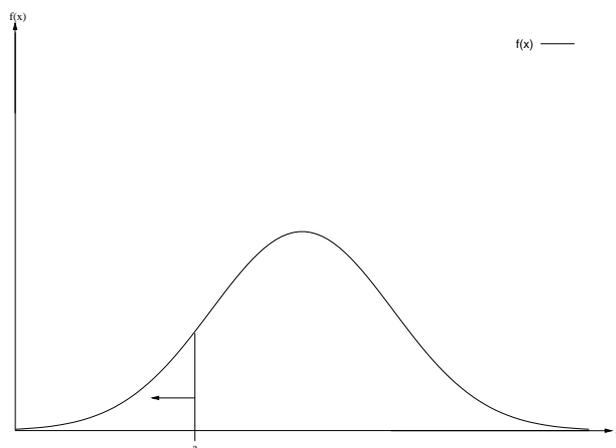
**Definition 6.1.** Eine Riemann-integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) \geq 0$  heißt *Wahrscheinlichkeitsdichte*, wenn die Fläche zwischen dem Graph der Funktion und der X-Achse genau eins ist.

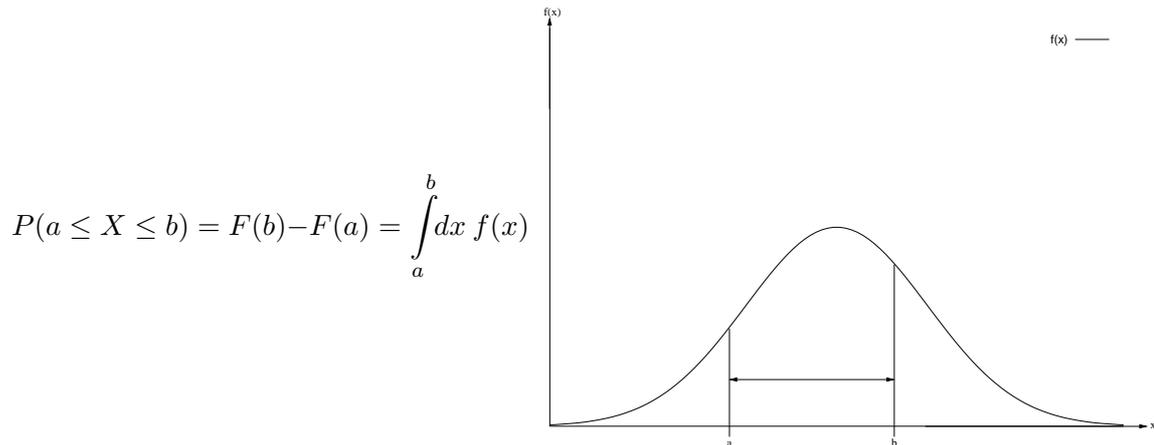
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 1$$



Wenn zu einer Zufallsvariablen  $X$  die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  gegeben ist, dann erhält man die Werte der Verteilungsfunktion  $F(x)$  durch das Integral

$$F(x) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a dx f(x)$$





Den Erwartungswert  $E(X)$  und Varianz  $\sigma^2(X)$  der Zufallsgröße  $X$  erhält man mit

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x f(x)$$

$$\sigma^2(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - E(X))^2 f(x)$$

Dazu gibt es folgende

**Aufgabe 2.** Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen  $X$  laute für  $c > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{c^3}(x-c)^2 & \text{für } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestätigen Sie, dass  $f(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und berechnen Sie ggf.  $E(X)$  sowie  $\sigma^2(X)$ .

**Lösung:** Zunächst ist zu zeigen, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \stackrel{!}{=} 1$$

ist. Zum Glück ist die Funktion fast überall 0, so dass sich das Integral stark vereinfacht:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) &= \int_0^c dx \frac{3}{c^3}(x-c)^2 = \frac{3}{c^3} \int_0^c dx (x-c)^2 \\ &= \frac{3}{c^3} \left[ \frac{x^3}{3} - cx^2 + c^2x \right]_0^c \\ &= \frac{3}{c^3} \left( \frac{c^3}{3} - c^3 + c^3 \right) = 1 \end{aligned}$$

Man kann also mit Fug und Recht von einer Wahrscheinlichkeitsdichte sprechen. Es folgt die Berechnung des Erwartungswertes sowie der Varianz:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x f(x) = \frac{3}{c^3} \int_0^c dx \, x(x-c)^2 \\ &= \frac{3}{c^3} \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2cx^3}{3} + c^2x^2 \right]_0^c \\ &= \frac{3}{c^3} \left( \frac{c^4}{4} - \frac{2c^4}{3} + \frac{c^4}{2} \right) \\ &= \frac{c}{4}, \end{aligned}$$

und

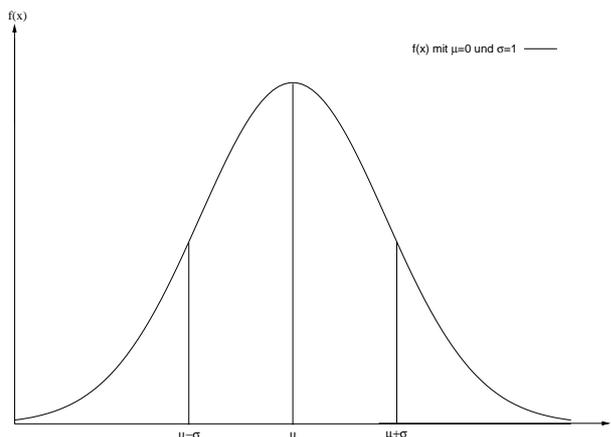
$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (x - E(X))^2 f(x) \\ &= \frac{3}{c^3} \int_0^c dx \, \left(x - \frac{c}{4}\right) (x - c)^2 \\ &= \frac{3}{c^3} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{5cx^4}{8} + \frac{c^4x}{16} + \frac{11c^2x^3}{16} - \frac{5c^3x^2}{16} \right]_0^c \\ &= \frac{3c^2}{80}. \end{aligned}$$

**Definition 6.2.** Eine Zufallsvariable  $X$  mit der Verteilungsfunktion

$$P(X \leq a) = F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a dx \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

heißt  $(\mu, \sigma)$ -normalverteilt. Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



heißt die Dichte der Normalverteilung. Sie hat an der Stelle  $x = \mu$  ihr Maximum und Wendepunkte bei  $\mu \pm \sigma$ . Für die Parameter  $\mu$  und  $\sigma^2$  der Normalverteilung gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ \sigma^2(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$