

Wiedergegeben werden Ausschnitte der Vorlesung *Signale und Systeme 1* von Prof. Müller-Wichards im Wintersemester 2001/2002 am Fachbereich Elektrotechnik und Informatik der Fachhochschule Hamburg (neuer Name: Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg). Die Darstellung erfolgt teilweise vereinfachend. Für die Richtigkeit kann keine Gewähr übernommen werden. Korrekturen sind jederzeit willkommen.

Inhaltsverzeichnis

0	Allgemeines	2
0.1	komplexe Rechnung	2
0.2	Integrale	2
0.3	Anderes	3
0.4	Signaleigenschaften	3
1	Fourier-Reihen	4
1.1	komplexe Darstellung	4
1.2	reelle Darstellung	4
1.3	Konvergenz	5
1.4	Korrespondenzen	5
2	Fourier-Transformation	6
2.1	klassische Fouriertransformation	6
2.2	Korrespondenzen und Rechenregeln	6
2.3	Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) und Faltungssatz	8
2.4	Transformation von Rechteckimpulsen	8
3	erweiterte Fourier-Transformation	9
3.1	Distributionen	9
3.2	Fourier-Transformierte von Distributionen	10
3.3	Schwache Ableitung	10
3.4	Delta-Funktion	11
3.5	Anwendung auf periodische Signale und Fourierreihen	12
4	Laplace-Transformation	13
4.1	Definition	13
4.2	Transformationstabelle	13
4.3	Rechenregeln	14
4.4	gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)	15
4.5	Anwendung auf Systeme	17
4.6	Zusammenschaltung und Zerlegung von Systemen	19

0 Allgemeines

0.1 komplexe Rechnung

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann bezeichnet \bar{z} die zugehörige konjugiert komplexe Zahl.

$$e^{j\pi} = -1, \quad e^{j\pi n} = (-1)^n = \cos(n\pi) \quad (0.1)$$

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (0.2)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \quad (0.3)$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) \quad (0.4)$$

0.2 Integrale

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt \quad (0.5)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \underbrace{|e^{-j2\pi ft}|}_{=1} dt \quad (0.6)$$

$$\int_0^T e^{jk\omega t} dt = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (0.7)$$

$$\int_0^T x(t) dt = \int_{0+\tau}^{T+\tau} x(t) dt \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}, \text{ wenn } x(t) \text{ periodisch mit } T \quad (0.8)$$

0.3 Anderes

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_a(t)|^2 dt = 0 \iff \text{l.i.m.} = x(t) \quad \text{Limes im quadratischen Mittel} \quad (0.9)$$

Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung (C.S.U.):

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \stackrel{\text{C.S.U.}}{\leq} \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad (0.10)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{Skalarprodukt}; \quad \|\vec{x}\| = x \quad \text{Betrag/Länge} \quad (0.11)$$

$$\left| \int_a^b x(t)y(t) dt \right| \stackrel{\text{C.S.U.}}{\leq} \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2 dt} \quad (0.12)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (MWS):

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(x^*) \quad \text{bei stetigen } f(x): x^* \in [a,b] \quad (0.13)$$

si-Funktion:

$$\text{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad (0.14)$$

0.4 Signaleigenschaften

$$\int_a^b g(t) dt < \infty \quad \text{lokal integrierbar für jedes endliche Intervall } [a,b] \quad (0.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad \text{absolut integrierbar} \quad (0.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{endliche Energie nicht periodischer Signale} \quad (0.17)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty \quad \text{endliche Leistung periodischer Signale} \quad (0.18)$$

1 Fourier-Reihen

1.1 komplexe Darstellung

Grundgedanke: Das mit T periodische Signal soll als Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen $k\omega$ re-konstruiert werden.

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{A_0}{2} \quad \text{Gleichanteil, arithmetisches Mittel, } \alpha_0 \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{2}(A_k + jB_k) \quad (1.2)$$

$$x(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega t} \quad (1.3)$$

n -te Teilsumme der Fourier-Reihe:

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{jk\omega t} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k e^{jk\omega t} + \alpha_{-k} e^{-jk\omega t}) \quad (1.4)$$

Sei $x(t)$ ein reelles Signal, dann gilt $\alpha_k = \overline{\alpha_{-k}}$.

$s_n(t)$ nähert von allen trigonometrischen Summen ein periodisches Signal $x(t)$ am besten im Sinne der kleinen Quadrate an.

1.2 reelle Darstellung

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt = 2\alpha_0 \quad (1.5)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega t dt = 2 \operatorname{Re} \alpha_k \quad (1.6)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega t dt = -2 \operatorname{Im} \alpha_k \quad (1.7)$$

$$x(t) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \quad (1.8)$$

1.3 Konvergenz

Sei $x(t)$ von endlicher Energie in $[0, T]$ und sei $s_n(t)$ die n -te Teilsumme der Fourierreihe von $x(t)$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |x(t) - s_n(t)|^2 dt = 0.$$

Die Fourierreihe konvergiert im **quadratischen Mittel**.

Ferner gilt die Parsevalsche Gleichung (*gesamte Leistung des Signals in den Fourierkoeffizienten*):

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt$$

Wenn das periodische Signal $x(t)$ auf $[0, T]$ beschränkt ist und aus endlich vielen monotonen Stücken besteht, konvergiert die Fourier-Reihe **punktweise**, jedenfalls dort, wo $x(t)$ stetig ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = x(t) \quad \text{für } x(t) \text{ stetig in } t \quad (1.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = \frac{1}{2}(x(t^+) + x(t^-)) \quad \text{für } t \text{ Sprungstelle von } x(t) \quad (1.10)$$

Sei $x(t)$ stetig und periodisch auf $[0, T]$ und differenzierbar in $(0, T)$ und sei $x'(t)$ von endlicher Energie auf $[0, T]$, dann konvergiert die Fourier-Reihe **gleichmäßig** gegen $x(t)$.

Dieser Satz gilt auch noch, wenn $x(t)$ endlich viele ‚Ecken‘ besitzt (z. B. Dreieckschwingung, aber kein nicht stetiges Rechteck).

1.4 Korrespondenzen

Differentiation Wenn $x(t)$ gleichmäßig konvergiert, $x(t) \circ \bullet \alpha_k$ und $x'(t) \circ \bullet \alpha'_k$ dann gilt $\alpha'_k = jk\omega \alpha_k$ für $k \in \mathbb{Z}$ bzw. $\alpha_k = \frac{1}{jk\omega} \alpha'_k$ für $k \neq 0$.

Solange $x'(t)$ stetig ist, kann das Verfahren wiederholt werden, andernfalls hilft die Impulsmethode weiter. α_0 kann nur aus $x(t)$ berechnet werden.

Verschiebung Wenn $x(t) \circ \bullet \alpha_k$ dann gilt $x_1(t) = x(t - t_0) \circ \bullet e^{-jk\omega t_0} \alpha_k$.

Spiegelung Wenn $x(t)$ reell und $x(t) \circ \bullet \alpha_k$ dann $x(-t) \circ \bullet \overline{\alpha_k}$

2 Fourier-Transformation

2.1 klassische Fouriertransformation

Sei $x(t)$ **nicht** periodisch, absolut integrierbar und von endlicher Energie. Dann ergibt die Fourier-Transformation das zu $x(t)$ gehörige kontinuierliche Spektrum $X(f)$.

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.2)$$

$$x(t) \circ \bullet X(f) \quad (2.3)$$

2.2 Korrespondenzen und Rechenregeln

Überlagerungssatz (Linearität der Fouriertransformation)

$$\mathcal{F}\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\} = c_1\mathcal{F}\{x_1(t)\} + c_2\mathcal{F}\{x_2(t)\} \quad (2.4)$$

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \circ \bullet c_1X_1(f) + c_2X_2(f) \quad (2.5)$$

Ähnlichkeitssatz mit $a \neq 0$, $x(t) \circ \bullet X(f)$

$$x(a \cdot t) \circ \bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (2.6)$$

a „klein“ (schmaler Impuls) $\circ \bullet$ breites (und flaches) Spektrum

a „groß“ (breiter Impuls) $\circ \bullet$ schmales (und hohes) Spektrum

Verschiebungssatz (Zeitverschiebung) mit $x(t) \circ \bullet X(f)$

$$x(t - t_0) \circ \bullet e^{j2\pi f(-t_0)} X(f) \quad (2.7)$$

Verschiebungssatz (Frequenzverschiebung) mit $X(f) \bullet \circ x(t)$

$$X(f - f_0) \bullet \circ x(t) e^{j2\pi f_0 t} \quad (2.8)$$

Zuordnungssatz mit $x(t)$ reell

Jedes Signal $x(t)$ läßt sich zerlegen in einen geraden und ungeraden Anteil:

$$x_g(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)), \quad x_g(-t) = x_g(t) \quad \text{gerade} \quad (2.9)$$

$$x_u(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)), \quad x_u(-t) = -x_u(t) \quad \text{ungerade} \quad (2.10)$$

$$x_g(t) + x_u(t) = x(t) \quad (2.11)$$

Zuordnungssatz:

$$\begin{array}{ccc} x(t) & = & x_g(t) + x_u(t) \\ \circ \downarrow & & \circ \downarrow \quad \circ \downarrow \\ X(f) & = & \underbrace{\text{Re}(X(f))}_{\text{Re}(X(f))} + \underbrace{j \text{Im}(X(f))}_{j \text{Im}(X(f))} \end{array}$$

Differentiationssatz für Zeitfunktion mit $x(t) \circ \rightarrow X(f)$

Gültig wenn $x(t)$ absolut integrierbar und differenzierbar und wenn $x(t)'$ absolut integrierbar.

$$x'(t) \circ \rightarrow j 2\pi f X(f) \quad (2.12)$$

$X(f)$ kann hiermit vereinfachend aus $x'(t)$ oder ggf. höheren Ableitungen berechnet werden, solange die abzuleitende Funktion stetig ist. Andernfalls ist die Impulsmethode anzuwenden.

Parsevalsche Gleichung (äquivalent zur Inversionsformel)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(f) - X_2(f)|^2 df \quad (2.14)$$

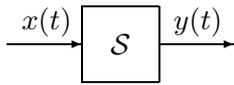
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{y}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \bar{Y}(f) df \quad (2.15)$$

Die Fourier-Transformations ist „abstandserhaltend“, insbesondere haben verschiedene Signale verschiedene Spektren.

Vertauschungssatz Wenn $x(t) \circ \rightarrow X(f)$ dann $X(t) \circ \rightarrow x(-f)$.

Zeitsignal und Spektrum sind im „gewissen Sinne“ austauschbar.

2.3 Lineare zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) und Faltungssatz



Signaltransf. in Blackbox: $\mathcal{S}\{x(t)\} = y(t)$ (2.16)

linear: $\mathcal{S}\{\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)\} = \lambda \mathcal{S}\{x_1(t)\} + \mu \mathcal{S}\{x_2(t)\}$ (2.17)

zeitinvariant: $\mathcal{S}\{x(t)\} = y(t) \implies \mathcal{S}\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$ (2.18)

Eigenfunktion eines LTI-System ist die harmonische Schwingung $x(t) = e^{j2\pi ft}$, die mit unveränderter Kurvenform, nur in Amplitude und/oder Phasenlage verändert, am Ausgang erscheint.

Sei $H(f)$ der *Frequenzgang* des Systems, so gelten für stabile Systeme die folgenden Festlegungen:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\} \cdot H(f)\} \quad (2.19)$$

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \quad \text{mit } y(t) \circ \bullet Y(f) \quad (2.20)$$

Im Zeitbereich wird das System mit der *Impulsantwort* beschrieben:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \text{mit } h(t) \circ \bullet H(f) \quad (2.21)$$

Die Faltung von $x_1(\mathbf{t})$ mit $x_2(\mathbf{t})$ ist definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\mathbf{t} - \tau) x_2(\tau) d\tau = x_1(\mathbf{t}) * x_2(\mathbf{t}) = x_2(\mathbf{t}) * x_1(\mathbf{t}) \quad (2.22)$$

Bei der Integration ist \mathbf{t} als Konstante zu behandeln.

Der Faltungssatz für die „klassische“ Fourier-Transformation lautet:

$$\mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = \mathcal{F}\{h(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x(t)\} = H(f) \cdot X(f) \quad (2.23)$$

2.4 Transformation von Rechteckimpulsen

$$\circ \bullet T \text{ si}(\pi f T) \quad (2.24)$$

$$\circ \bullet ab \text{ si}(\pi f b) \quad (2.25)$$

$$\circ \bullet e^{-j2\pi f c} ab \text{ si}(\pi f b) \quad (2.26)$$

3 erweiterte Fourier-Transformation

3.1 Distributionen

Eine Testfunktion ist eine nicht weiter spezifizierte Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jede Testfunktion $\varphi(t)$ gibt es ein Intervall $[a,b]$, so dass $\varphi(t) = 0$ für $t \notin [a,b]$ gilt.
2. $\varphi(t)$ ist beliebig oft differenzierbar.

Die Menge aller Testfunktionen bilden einen Vektorraum \mathcal{D} .

Fouriertransformierte von Testfunktionen

$$\Phi(f) = \mathcal{F}\{\varphi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

$$|\Phi(f)| \leq \frac{c_n}{|f|^n} \quad \text{d. h. } \Phi(f) \text{ fällt schneller ab, als jede Potenz von } f \quad (3.2)$$

$$\varphi(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\Phi(f)\} \quad (3.3)$$

$\Phi(f)$ ist absolut integrierbar und beliebig oft differenzierbar.

Ein lineares Funktional T_g ordnet mit Hilfe einer lokal integrierbaren Funktion $g(t)$ jeder Testfunktion eine komplexe Zahl zu.

$$T_g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$T_g(\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \bar{g}(t) dt < \infty \quad (3.4)$$

$$T_g(\varphi(t)) = \langle \varphi(t), g(t) \rangle \quad (\text{Kurzdarstellung}) \quad (3.5)$$

Ist $g(t)$ eine Funktion im gewöhnlichen Sinne, stellt $g(t)$ (genauer T_g) eine *reguläre Distribution* dar.

Ist $g(t)$ etwas anderes wie etwa die Delta-Funktion bezeichnet man $g(t)$ als *singuläre Distribution*.

3.2 Fourier-Transformierte von Distributionen

Für die Anwendung der Parsevalschen Gleichung auf Distributionen, auch singuläre, wird definiert:

$$\langle \varphi(t), g(t) \rangle = \langle \Phi(f), \mathcal{F}\{g(t)\} \rangle \quad (3.6)$$

Umkehrbar eindeutig ist auch die erweiterte Fourier-Transformation. $x(t)$ und $y(t)$ seien verschiedene Distributionen:

$$\langle \varphi_0(t), x(t) \rangle \neq \langle \varphi_0(t), y(t) \rangle \iff \langle \Phi_0(f), X(f) \rangle \neq \langle \Phi_0(f), Y(f) \rangle \quad (3.7)$$

Rechenregel 1 $g(t)$ sei eine reguläre Distribution:

$$\langle \varphi(t), c g(t) \rangle = \langle \bar{c} \varphi(t), g(t) \rangle \quad (3.8)$$

Auch für $c(t)$ gültig, sofern unendlich oft differenzierbar.

Rechenregel 2

$$x(t) \delta_{t_0} = x(t_0) \delta_{t_0} \quad (3.9)$$

Rechenregel 3

$$x(t) * \delta_{t_0} = x(t - t_0) \quad (3.10)$$

3.3 Schwache Ableitung

Sei $g(t)$ eine Distribution, dann ist die *schwache Ableitung* $Dg(t)$ folgendermaßen definiert:

$$\langle \varphi(t), Dg(t) \rangle = -\langle \varphi'(t), g(t) \rangle \quad (3.11)$$

Existiert die gewöhnliche Ableitung $g'(t)$, so gilt $Dg(t) = g'(t)$.

Diffsatz 1 schwache Ableitung im Zeitbereich, Distribution $g(t)$

$$\mathcal{F}\{Dg(t)\} = j2\pi f \mathcal{F}\{g(t)\} \quad (3.12)$$

Diffsatz 2 im Frequenzbereich

$$D\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{-j2\pi t g(t)\} \quad (3.13)$$

Die Impulsmethode ist ein Verfahren, um die Fourier-Transformierte eines Signal $x(t)$, das aus einem Polygonzug besteht, mit Hilfe der wiederholten Anwendung der schwachen Ableitung zu berechnen. Dabei wird eine Sprungstelle der Höhe $\pm a$ an der Stelle t_0 zu einem Dirac-Impuls (Delta-Funktion, s. u.) $\pm a \delta_{t_0}$ abgeleitet. Anschließend wird die Fourier-Transformierte dieser Summe von Delta-Funktionen gebildet und mittels Diffsatz 2 die Fourier-Transformierte des Ausgangssignal bestimmt.

3.4 Delta-Funktion

Auch als Dirac-Impuls bezeichnet, verfügt die Delta-Funktion δ über folgende andere Schreibweisen und Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \delta_{t_0} &= \delta(t - t_0) \quad \text{bzw.} \quad \delta_{f_0} = \delta(f - f_0) \\ \delta(t - t_0) &= \begin{cases} \infty & \text{für } t = t_0 \\ 0 & \text{für } t \neq t_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \text{mit } a > 0 \quad (3.15)$$

$$\langle \varphi(t), \delta_{t_0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = \varphi(t_0) \quad (3.16)$$

Für die Fourier-Transformation ergibt sich:

$$\delta_{f_0} = \mathcal{F} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad \text{Spektrum einer harmonischen Schwingung} \quad (3.17)$$

$$\delta_0 = \mathcal{F} \{ 1 \} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{F} \{ \delta_{t_0} \} = e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.19)$$

$$\mathcal{F} \{ \delta_0 \} = 1 \quad (3.20)$$

$$\mathcal{F} \{ D\delta_{t_0} \} = j2\pi f \mathcal{F} \{ \delta_{t_0} \} = j2\pi f e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{F} \{ D\delta_0 \} = j2\pi f \quad \mathcal{F} \{ D^2\delta_0 \} = (j2\pi f)^2 \quad (3.22)$$

Für LTI-Systeme (vgl. S. 8) gilt, wenn $y(t) = \mathcal{S}\{x(t)\}$:

$$\mathcal{S} \{ \delta_0 \} = h(t) * \delta_0 = h(t) \quad (3.23)$$

$$\mathcal{S} \{ \delta_{t_0} \} = h(t) * \delta_{t_0} = h(t - t_0) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} \right\} &= \mathcal{F}^{-1} \{ H(f) \delta_{f_0} \} = \mathcal{F}^{-1} \{ H(f_0) \delta_{f_0} \} = H(f_0) \mathcal{F}^{-1} \{ \delta_{f_0} \} \\ &= H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Delta-Funktion als schwache Ableitung der Sprungfunktion $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$D\varepsilon(t) = \delta_0 \quad (3.27)$$

$$D\varepsilon(t - t_0) = \delta_{t_0} \quad (3.28)$$

3.5 Anwendung auf periodische Signale und Fourierreihen

Das Spektrum $Y(f)$ eines mit T_0 periodischen Signals $y(t)$ kanns aus dem Spektrum $Y_0(f)$ des (nicht periodischen) „Mustersignals“ $y_0(t)$ durch Multiplikation mit einem „Kamm“ äquidistanter Delta-Funktionen („Nadelabstand“ $f_0 = \frac{1}{T_0}$) bestimmt werden.

Dieses Spektrum $Y(f)$ ist eine Folge äquidistanter und mit den Fourier-Koeffizienten α_k gewichteter Dirac-Impulse.

$$y_0(t) = \begin{cases} y(t) & \text{für } |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.29)$$

$$Y_0(f) \bullet \text{---} \circ y_0(t) \quad (3.30)$$

$$Y(f) = \frac{1}{T_0} Y_0(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kf_0} \quad (3.31)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} Y_0(kf_0) \quad (3.32)$$

Ein Faltungssatz Sei $x(t)$ absolut integrierbar (und von endlicher Energie) und sei $y(t)$ periodisch mit der Periode T_0 und aus endlich vielen monotonen Stücken zusammengesetzt (Dirichlet-Bedingung), dann gilt:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} * \mathcal{F}\{y(t)\} \quad (3.33)$$

Da $y(t)$ periodisch ist, ist $\mathcal{F}\{y(t)\}$ ein Impulskamm.

4 Laplace-Transformation

4.1 Definition

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad s \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

$$f(t) \circ \longrightarrow F(s) \quad (4.2)$$

Ist das Signal $f(t)$ kausal und exponentiell beschränkt, dann existiert $F(s)$. Im einzelnen:

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (4.3)$$

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Re}(s) > \gamma \quad (4.5)$$

Exponentiell beschränkt sind unter anderem:

1. alle beschränkten und stetigen Funktionen, z. B. $\sin t$
2. alle Polynome
3. alle Exponentialfunktionen vom Typ $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Wenn $f(t)$ differenzierbar ist und $f'(t)$ exponentiell beschränkt ist, dann ist auch $f(t)$ exponentiell beschränkt. (Der Umkehrschluss, $f'(t)$ nicht exponentiell beschränkt $\Rightarrow f(t)$ auch nicht, ist falsch.)

4.2 Transformationstabelle

Alle $f(t)$ kausal.

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s - \lambda}$
$\frac{1}{n!} t^n e^{\lambda t}$	$\frac{1}{(s - \lambda)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad a > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\frac{e^{at} - e^{-at}}{2} = \sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} = \cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

4.3 Rechenregeln

Überlagerungssatz $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)\} = \lambda \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mu \mathcal{L}\{f_2(t)\} \quad (4.6)$$

Umkehrtransformation (In der Praxis mittels Tabellen und Partialbruchzerlegung)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N F(s) e^{st} dt \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \gamma \quad (4.7)$$

Ähnlichkeitssatz $f(t) \circ \bullet F(s)$:

$$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.8)$$

$$F(as) \bullet \circ \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \quad \text{für } a > 0 \quad (4.9)$$

Verschiebungssatz für Zeitfunktion $f(t) \circ \bullet F(s)$:

$$f(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s) \quad (4.10)$$

Verschiebungssatz für Bildfunktion auch „Dämpfungssatz“, $f(t) \circ \bullet F(s)$

$$e^{-\alpha t} f(t) \circ \bullet F(s+\alpha) \quad \text{für } \operatorname{Re}(s+\alpha) > \gamma \quad (4.11)$$

Differentiationssatz für Zeitfunktion $f(t) \circ \bullet F(s)$:

$$f'(t) \circ \bullet sF(s) - f(0) \quad (4.12)$$

Differentiationssatz für Bildfunktion $f(t) \circ \bullet F(s)$:

$$-t f(t) \circ \bullet F'(s) \quad (4.13)$$

$$(-1)^n t^n f(t) \circ \bullet F^{(n)}(s) \quad (4.14)$$

Integrationsatz $f(t) \circ \bullet F(s)$:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s} \quad (4.15)$$

Faltung und Faltungssatz $f_1(t)$ und $f_2(t)$ kausal und austauschbar:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (4.16)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \circ \bullet F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (4.17)$$

Sind $f_1(t)$ und $f_2(t)$ exponentiell beschränkt, dann ist dies auch $f_1(t) * f_2(t)$.

4.4 gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

lineare DGI 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'(t) + ay(t) = f(t) \quad y(0) = y_0 \quad \text{Anfangswertproblem (AWP)} \quad (4.18)$$

$$Y(s) = F(s) \frac{1}{s+a} + y_0 \frac{1}{s+a} \quad (4.19)$$

$$y(t) = f(t) * e^{-at} + y_0 e^{-at} \quad (4.20)$$

Lösungsschema

AWP/DGL	Lösung der DGL	
↓ \mathcal{L}	PBZ $\uparrow \mathcal{L}^{-1}$	
algebraische Gleichung	→	Lösung

Partialbruchzerlegung (PBZ) für die echt gebrochen, rationale Funktion $\frac{p(s)}{q(s)}$
d. h. Zählergrad < Nennergrad = n .

$$q(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n) \quad \text{nach dem Fundamentalsatz der Algebra} \quad (4.21)$$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

1. λ_k einfache Nullstelle: Zerlegungsanteil $\frac{A}{s - \lambda_k}$
2. λ_k zweifache Nullstelle: Zerlegungsanteil $\frac{A}{s - \lambda_k} + \frac{B}{(s - \lambda_k)^2}$
3. λ_k m -fache Nullstelle: Zerlegungsanteil $\frac{A_1}{s - \lambda_k} + \frac{A_2}{(s - \lambda_k)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s - \lambda_k)^m}$

Soll ein Paar konjugiert-komplexer Nullstellen, zu erkennen am nicht reell zu zerlegenden Nennerfaktor $s^2 + ps + q$, nicht im komplexen zerlegt werden, ist $\frac{As + B}{s^2 + ps + q}$ als Zerlegungsanteil zu verwenden.

Funktion und Summe der Zerlegungsanteile gleichsetzen, mit Funktionsnenner ausmultiplizieren, dann die Koeffizienten mittels geschickten Einsetzens (Nullstellen) und/oder linearen Gleichungssystem vergleichen.

Ist die Funktion eine Summe echt gebrochen rationaler Funktionen, kann eine summandenweise PZB sinnvoll sein.

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

und verschwindenden Anfangsbedingungen

$$y'' + py' + q = f(t), \quad y'(0) = y(0) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R} \quad (4.22)$$

$$\circ \bullet Y(s) \cdot \underbrace{(s^2 + ps + q)}_{\text{charakterisches Polynom } P(s)} = F(s) \quad (4.23)$$

$$Y(s) = F(s) \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2 + ps + q}}_{\text{Übertragungsfunktion } G(s)} \quad (4.24)$$

$$\bullet \circ y(t) = f(t) * g(t) \quad (4.25)$$

$$P(s) = s^2 + ps + q = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 \quad (4.26)$$

Bestimmung von λ_1 und λ_2 sowie $g(t)$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad D = \frac{p^2}{4} - q, \quad \omega = \sqrt{|D|} \quad (4.27)$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & \text{wenn } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ bzw. } D \neq 0 \\ t e^{\lambda_1 t} & \text{wenn } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ bzw. } D = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Besonderheit bei $D < 0$, d. h. λ_1 und λ_2 komplex:

$$g(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{p}{2}t} \sin \omega t \quad (4.29)$$

Zur Lösung ohne verschwindende Anfangsbedingungen siehe Mitschrift vom 16.11.01, S 8–5f.

DGL n-ter Ordnung bei verschwindenden Anfangsbedingungen:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \quad (4.30)$$

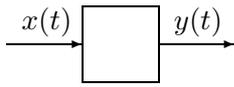
$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (4.31)$$

$$G(s) = \frac{1}{P(s)} \quad (4.32)$$

$$Y(s) = G(s) \cdot F(s) \quad (4.33)$$

$$y(t) = g(t) * f(t) \quad (4.34)$$

4.5 Anwendung auf Systeme



Eingangssignal $x(t)$ ist bekannt. Anfangsbedingungen verschwinden.

$$f(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t) \quad (4.35)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t) \quad (4.36)$$

$$\circ \bullet Y(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i = X(s) \sum_{i=0}^m b_i s^i \quad (4.37)$$

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} X(s) \quad \text{wobei üblicherweise } m < n \quad (4.38)$$

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (4.39)$$

P-T₁-Glied s. o. mit $m = 0$, d. h. Eingangssignal ohne überlagerte Ableitungen.

$$T_1 y' + y = K x(t) \quad \text{statt } K \text{ auch } K_P \text{ üblich} \quad (4.40)$$

$$y' + \frac{1}{T_1} y = \frac{K}{T_1} x(t) \quad (4.41)$$

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} = \frac{\frac{K}{T_1}}{s + \frac{1}{T_1}} = \frac{K}{T_1} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \quad (4.42)$$

$$\bullet \circ g(t) = \frac{K}{T_1} e^{-\frac{1}{T_1} t} \quad (4.43)$$

Sprungantwort Wird das System mit der Sprungfunktion angeregt ist das Ausgangssignal die Stammfunktion der Impulsantwort.

$$x(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (4.45)$$

Beim P-T₁-Glied:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} \frac{1}{s} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{T_1}} \quad (4.46)$$

$$\bullet \circ y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \quad (4.47)$$

Vergleichbar mit Laden eines Kondensators an Gleichspannung ab $t = 0$ und Verstärkung der Kondensatorspannung um K .

Sprungantwort Erfolgt die Anregung mit Rechteckimpulsen der Fläche 1, die sich der Delta-Funktion annähern, erscheint am Ausgang die Sprungantwort $g(t) \circ \bullet G(s)$.

$$x_{h_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{h_n} & \text{für } 0 \leq t \leq h_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.48)$$

$$h_n \text{ sei eine Nullfolge positiver Zahlen} \quad (4.49)$$

$$y_n(t) = \frac{1}{h_n} \int_{t-h_n}^t g(\tau) d\tau \stackrel{\text{MWS}}{=} g(\tau_n) \quad (4.50)$$

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\tau_n) \quad (4.51)$$

$y(t)$ ist Lösung der homogenen DGL mit $y(0), y'(0) = 1$ (keine verschwindenden Anfangsbedingungen).

Frequenzgang $H(\omega)$ vergleichbar $\underline{F}(\omega)$ in ET3

$$y'' + py' + qy = x(t) \quad \text{bekanntes System, } y(0) = y'(0) = 0 \quad (4.52)$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{j\omega t} & \text{für } t \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.53)$$

$$y(t) = H(\omega)x(t) \quad \text{Lösungsansatz} \quad (4.54)$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + pj\omega + q} = \frac{1}{P(j\omega)} = G(j\omega) \quad (4.55)$$

$$y(t) = G(j\omega)x(t) \quad (4.56)$$

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \text{für alle } i \quad (4.57)$$

In Worten: Den Frequenzgang $H(\omega)$ erhält man, indem man in der Übertragungsfunktion $G(s)$ $s = j\omega$ setzt und somit die Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse nutzt.

Als Bedingung muss $G(j\omega)$ überhaupt definiert sein bzw. existieren. Dies ist der Fall, wenn $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ absolut integrierbar ist. Hierfür muss der Realteil aller Nullstellen des charakteristischen Polynom $P(s)$ negativ sein. In diesem Fall sind die e-Funktionen in $g(t)$ beschränkt, siehe Seite 16.

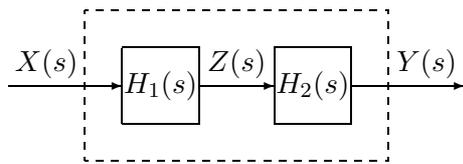
Angewandt auf das P - T_1 -Glied ergibt sich:

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} \quad T_1 \left(s + \frac{1}{T_1} \right) \rightsquigarrow \text{Nullstelle bei } -\frac{1}{T_1} < 0 \quad (4.58)$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{T_1 j\omega + 1} \quad \text{Frequenzgang} \quad (4.59)$$

4.6 Zusammenschaltung und Zerlegung von Systemen

Reihenschaltung

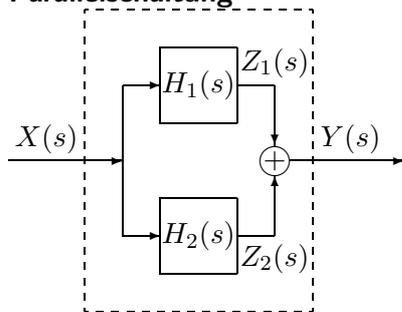


$$Z(s) = X(s)H_1(s), \quad Y(s) = Z(s)H_2(s) \quad (4.60)$$

$$Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s) = X(s)G(s) \quad (4.61)$$

$$G(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad (4.62)$$

Parallelschaltung

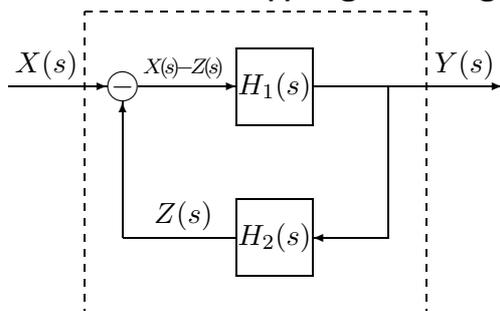


$$Z_1(s) = X(s)H_1(s), \quad Z_2(s) = X(s)H_2(s) \quad (4.63)$$

$$Y(s) = X(s)(H_1(s) + H_2(s)) = X(s)G(s) \quad (4.64)$$

$$G(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (4.65)$$

Kreis- bzw. Rückkopplungsschaltung



$$Y(s) = (X(s) - Z(s))H_1(s) \quad (4.66)$$

$$Z(s) = Y(s)H_2(s) \quad (4.67)$$

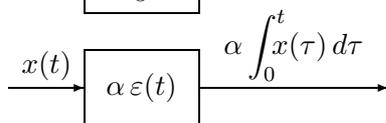
$$Y(s) = X(s) \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = X(s)G(s) \quad (4.68)$$

$$G(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \quad (4.69)$$

I-Glied Integrator und Verstärkung α



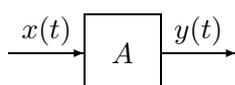
$$G(s) = \alpha \frac{1}{s} \quad (4.70)$$



$$x(t) \circ \bullet X(s) \quad (4.71)$$

$$\alpha \int_0^t x(\tau) d\tau \circ \bullet Y(s) \quad (4.72)$$

P-Glied einfacher Verstärker

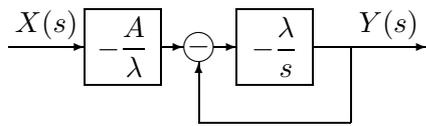


$$G(s) = A \quad \text{unabhängig von } s \quad (4.73)$$

$$Y(s) = A X(s) \quad (4.74)$$

$$y(t) = A x(t) \quad (4.75)$$

P-T₁-Glied als Integrator in Kreisschaltung und umgekehrt



$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} = \frac{K}{T_1} \cdot \frac{1}{s - \left(-\frac{1}{T_1}\right)} \quad (4.76)$$

$$A = \frac{K}{T_1} \quad \lambda = -\frac{1}{T_1}$$

$$G(s) = A \cdot \frac{1}{s - \lambda} = -\frac{A}{\lambda} \cdot \frac{-\frac{\lambda}{s}}{1 + 1 \cdot \left(-\frac{\lambda}{s}\right)} \quad (4.77)$$

Systemzusammensetzungen aus P - T_1 -Gliedern einerseits und P - sowie I -Gliedern andererseits sind gleichwertig. Also kann jede Übertragungsfunktion als Netzwerk von P - und I -Gliedern dargestellt werden.

Zerlegung Sei $G(s)$ eine beliebige echt gebrochene rationale Übertragungsfunktion. Die Partialbruchzerlegung von $G(s)$ liefert eine Darstellung als Summe von Ausdrücken zweier Formen.

1. Form: $\frac{A}{(s - \lambda)^k}$ mit λ als reeller Nullstelle des Nennerpolynom von $G(s)$. Diese Form ist direkt in P - T_1 -Glieder zu überführen.

2. Form: $\frac{As + B}{(s^2 + ps + q)^k}$ mit $A, B, p, q \in (R)$ wobei $s^2 + ps + q$ keine reellen Nullstellen besitzt. Es werden zwei neue Variablen eingeführt:

$$s^2 + ps + q = (s - a)^2 + b^2 = s^2 - 2as + a^2 + b^2 \quad (4.78)$$

$$a = -\frac{p}{2}, \quad b^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0 \quad (4.79)$$

Damit ist folgende Zerlegung möglich:

$$\frac{As + B}{(s - a)^2 + b^2} = \underbrace{\frac{A(s - a)}{(s - a)^2 + b^2}}_{\text{I)}} + \underbrace{\frac{Aa + B}{(s - a)^2 + b^2}}_{\text{II)}} \quad (4.80)$$

$$\text{I)} \quad \frac{A(s - a)}{(s - a)^2 + b^2} = \frac{\frac{A}{s - a}}{1 + \frac{A}{s - a} \cdot \frac{b^2}{A \cdot (s - a)}} \quad (4.81)$$

$$\text{II)} \quad \frac{Aa + B}{(s - a)^2 + b^2} = \frac{Aa + B}{b^2} \cdot \frac{\frac{b}{s - a} \cdot \frac{b}{s - a}}{1 + 1 \cdot \left(\frac{b}{s - a} \cdot \frac{b}{s - a}\right)} \quad (4.82)$$

Für den Schaltplan¹ gilt: + wird zur Parallelschaltung, · zur Reihenschaltung.

¹MRR geschuldet.