Wiedergegeben werden Ausschnitte der Vorlesung *Analysis 2* von Prof. Barbirz im Sommersemester 2001 am Fachbereich Elektrotechnik und Informatik der Fachhochschule Hamburg. Für die Richtigkeit wird keine Gewähr übernommen.

5 Integralrechnung

5.2 Das bestimmte Integral

5.2.3 Eigenschaften des bestimmten Integrals

14.03.01

1) Integral mit *gleichen* Integrationsgrenzen: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) Vertauschen von Integrationsgrenzen: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) Zerlegung des Integrationsintervalls: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4) Vorziehen eines konstanten Faktors: $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

5) endliche Summe von Funktionen: $\int_a^b \left[\sum_{k=1}^N f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^N \left[\int_a^b f_k(x)\,dx\right]$

6) Linearkombinationen: $\int_a^b \sum_{k=1}^N c_k f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^N c_k \int_a^b f_k(x)\,dx$

5.3 Das unbestimmte Integral

5.3.3 Grundintegrale

21.03.01

1) $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \qquad (p \neq -1)$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int e^x\,dx = e^x + C$

4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$

5) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

8) $\displaystyle\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1+\tan^2 x\right) dx = \tan x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1+\cot^2 x\right) dx = -\cot x + C$

11) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx = \cosh x + C$

12) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx = \sinh x + C$

13) $\displaystyle\int \tanh x\,dx = \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,dx = \ln(\cosh x) + C$

14) $\displaystyle\int \coth x\,dx = \int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx = \ln|\sinh x| + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \int \left(1-\tanh^2 x\right) dx = \tanh x + C$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \int \left(-1+\coth^2 x\right) dx = -\coth x + C$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases} \qquad \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \left\{ \begin{array}{lcll} \operatorname{Artanh} x + C_1 & : & |x|<1 & \operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{Arcoth} x + C_2 & : & |x|>1 & \operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \end{array} \right\} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad : \quad |x|<1$

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arcosh} x + C \quad : \quad |x|>1 \qquad \operatorname{Arcosh} x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

21) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arsinh} x + C \qquad \operatorname{Arsinh} x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$

5.3.4 Berechnung bestimmter Intergrale mit Hilfe von Stammfunktionen

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

5.4 Allgemeine Integrationsmethode

5.4.2 Integration einer Linearkombination

Integrationsregel 1 Homogenität: $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

Integrationsregel 2 Additivität: $\int \big(f_1(x)dx + f_2(x)dx\big) = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

5.4.3 Integration durch Substition

Integrationsregel 3 $F(x) = \int f(x)dx = \int f\big(u(t)\big)\cdot u'(t)dt = F\big(u(t)\big)$

mit der Substition $x = u(t)$, $\dfrac{dx}{dt} = u'(t)$, $dx = u'(t)\cdot dt$

Überblick über einige mögliche Substitution

28.03.01 I $f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$: $x = a\cdot\sin t$, $dx = a\cdot\cos t\cdot dt$, $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$

II $f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$: $x = a\cdot\cosh t$, $dx = a\cdot\sinh t\cdot dt$, $t = \operatorname{Arcosh}\dfrac{x}{a}$

Weitere Substitutionen im Stöcker, Seite 484.

wichtige Ergänzung bei der Berechnung bestimmter Integrale
für den Fall der Nutzung einer Variablensubstitution

Beim Übergang zur neuen Variablen t ist es auf jeden Fall zweckmäßig, die Grenzen ebenfalls zu substituieren. Die Rücksubstitution entfällt.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{t_1=u(x_1)}^{t_2=u(x_2)} f\big(u(t)\big)u'(t)dt = \Big[F\big(u(t)\big)\Big]_{t_1}^{t_2}$$

5.4.4 Integration eines Produkt, partielle Integration

Berechnung von $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$

I Spezialfall: $g(x) = f'(x)$

Integrationsregel 4 $\int f(x) \cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{2} f^2(x)$

II allgemeiner Fall

Integrationsregel 5 $\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

III Sonderfall: $f(x) = 1$

Integrationsregel 6 $\int g(x)\, dx = x \cdot g(x) - \int x \cdot g'(x)\, dx$

5.4.5 Integration eines Quotienten

Berechnung von $\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$

I Spezialfall $f(x) = g'(x)$

Integrationsregel 7 $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln\big|g(x)\big|$ nur für $g(x) \neq 0$

II Spezialfall: $f(x)$, $g(x)$ Polynome

Fall 1) $g(x)$ vom Grad 1, f(x) vom Grad 0, d. h. konstant

$$c \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{c}{a} \ln|ax+b|$$

Fall 2) Verallgemeinerung

Integrationsregel 8 $\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$ mit Grad $g(x) \geq 2$
Grad $f(x) <$ Grad $g(x)$

läßt sich *immer* durch Partialbruchzerlegung lösen. (Bei unecht gebrochenen Funktionen wird durch Polynomdivision ein ganzrationaler Anteil abgespalten.)
Siehe Stöcker Seite 487 f. oder Tutoriumsmitschrift vom 27.06.01 für Hr. Djengas Methode mit $A = \lim_{x \to x_0} \cdots$.

04.04.01 Fall 3) allgemeiner Fall mit Nennerpolynom Grad 2, Zählerpolynom Grad 0

Siehe Mitschrift vom 04.04.01, Seite 4–4 f., oder Stöcker, Integral Nr. 63, Seite 819.

5.5 Numerische Integration (Teil 2)

Näherungsweise Berechnung von $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F$

aus gegebenen Wertepaaren $\big(x_i, f(x_i)\big) = (x_i, y_i)$, $i = 0 \cdots n$, $a = x_0$, $b = x_n$
einer äquidistanten Zerteilung $x_i = a + i \cdot h$, Streifenbreite $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Zur Lösung genügen die Stützwerte $f(x)$, die Rechenvorschrift $f(x)$ muss nicht bekannt sein.

14.03.01

5.2.5 Numerische Integration (Teil 1)

1) Rechteckformeln

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

Spezielle Wahl der ξ_i:

I) $\xi_i = x_{i-1} : f(\xi_i) = y_{i-1} \quad \rightsquigarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$

II) $\xi_i = x_i \quad : f(\xi_i) = y_i \quad \rightsquigarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=1}^{n} y_i$

2) Sehnen- oder Trapezformel $\quad \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{h}{2} \left(y_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right)$

04.04.01

5.5.2 Keplersche Faßregel

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b) \right); \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

11.04.01 Ohne Beweis: Die Keplersche Faßregel liefert den exakten Integralwert bei beliebigen Polynomen 3. Grades als Funktion, über die integriert wird.

5.5.3 Die Simpsonsche Integrationsformel

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \left(y_0 + 4 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} y_{2k} + y_n \right) \qquad \text{(geradzahlige Zerlegung)}$$

20.06.01 **Fehlerarten**

wahrer Wert I_W: exakter Rechenwert, Normwert, ...

Näherungs-Wert I_N: Ergebnis numerischer Integration, Meßwert, ...

absoluter Fehler $\Delta = I_N - I_W$

relativer Fehler $\Delta_r = \dfrac{I_N - I_W}{I_W}$

11.04.01

5.6 Uneigentliche Integrale

5.6.1 Integrale über unbeschränkte Intervalle

Definition 1 Ist $f(x)$ in $[a, \infty)$ definiert und dort beschränkt und existiert $\int_a^\lambda f(x)\,dx$ für alle $a \leq \lambda < \infty$, so bezeichnet man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} F(\lambda) - F(a)$$

als *uneigentliches Integral.*

Fallls der Grenzwert endlich ist, spricht man von einem *konvergenten*, uneigentlichen Integral, andernfalls von einem *divergenten* Integral.

Sinngemäß gilt: $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\lambda\to\infty} F(-\lambda)$

Definition 2 Ist $f(x)$ für $x \in \mathbf{R}$ definiert und beschränkt, und existiert $\int_{-\lambda}^\lambda f(x)\,dx$ für alle $0 \leq \lambda < \infty$, so nennt man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^\lambda f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \big[F(\lambda) - F(-\lambda)\big]$$

ein uneigentliches Integral.

Falls der Grenzwert existiert, spricht man vom *Cauchyschen Hauptwert* des Integrals

5.6.2 Integrale über nicht beschränkte Funktionen

Siehe Mitschrift vom 11.04.01, Seite 5–7f.

5.7 Anwendungen

5.7.1 Mittelwerte von Funktionen

25.04.01 1) linearer Mittelwert $\mu = \overline{y} = \overline{f(x)} = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$

2) quadratischer Mittelwert $\overline{y_Q} = \sqrt{\overline{y^2}} = \sqrt{\overline{f^2(x)}} = \sqrt{\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$

Für beliebige periodische Funktionen x(t) mit Periodendauer T bezeichnet man:

1) *Mittelwert* $\overline{x} = \overline{x(t)} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int\limits_{t_m-\frac{T}{2}}^{t_m+\frac{T}{2}} x(t)\,dt = \dfrac{1}{T} \int\limits_{(T)} x(t)\,dt$

t_m: Mitte des beliebigen Integrationsintervalls der Dauer T

2) *Effektivwert* $x_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\overline{x^2(t)}} = \sqrt{\dfrac{1}{T} \displaystyle\int\limits_{(T)} x^2(t)\,dt}$

5.7.3 Volumina von Rotationskörpern

Durch Drehung einer Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse entsteht im Intervall $[a, b]$ ein Rotationskörper mit dem Volumen V_{x}:

$$V_{\text{x}} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int\limits_a^b y^2\,dx$$

Bei Rotation um die y-Achse mit der Mantellinie $y = f(x)$ ist für die Integration die Umkehrfunktion $x = g(y)$ erforderlich.

$$V_{\text{y}} = \pi \int\limits_c^d g^2(y)\,dy$$

7 Fourierreihen

7.1 Darstellung periodischer Funktionen durch Fourierreihen

7.1.2 Definition und Konvergenz von Fourierreihen

16.05.01 Ist $x(t)$ periodisch und erfüllt die *Dirichletschen* Bedingungen, so gilt:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \;; \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

mit den reellen Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} x(t)\, dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} x(t) \cos n\omega_0 t\, dt \;; \qquad n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} x(t) \sin n\omega_0 t\, dt \;; \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

7.1.3 Komplexe Darstellung

komplexe Darstellung der Fourierreihe

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega_0 t} \\ c_0 &= \frac{a_0}{2} \qquad \textit{reell} \\ \underline{c}_n &= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & : n \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) & : n \leq -1 \end{cases} \\ \underline{c}_{-n} &= \underline{c}_n^* \qquad \textit{konjugiert komplex} \end{aligned}$$

23.05.01 Berechnung der $\underline{c}_n$ durch Integration über x(t)

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int\limits_{(T)} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \qquad \text{für alle } n \in \mathbf{Z}$$

$$a_0 = 2\,c_0 \;; \qquad a_n = 2\,\mathrm{Re}\,\underline{c}_n \;; \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\,\underline{c}_n \;; \qquad n \geq 1$$

7.1.4 Symmetrieeigenschaften

gerade Funktionen $x(-t) = x(t)$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} x(t)\cos n\omega_0 t\, dt\,; \qquad n \geq 0 \\
b_n &= 0\,; \qquad n \geq 1 \\
c_n &= \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & : n \geq 0 \\ \frac{1}{2}a_{-n} & : n < 0 \end{cases} \qquad \text{reell}
\end{aligned}$$

ungerade Funktionen $x(-t) = -x(t)$

$$\begin{aligned}
a_n &= 0\,; \qquad n \geq 0 \\
b_n &= \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} x(t)\sin n\omega_0 t\, dt\,; \qquad n \geq 1 \\
c_0 &= 0 \\
c_n &= \begin{cases} -j\frac{1}{2}b_n & : n > 0 \\ +j\frac{1}{2}b_{-n} & : n < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

weitere Symmetrien *Siehe Bronstein, Seite 417.*

11.06.01 # 8 Differentialgleichungen (DGL)

8.2 Lösungmethoden gewöhnlicher DGL

1) Integration durch Trennung der Variablen Nur bei speziellen DGL anwendbar.

I) Trennung der Variablen

II) Unbestimmte Integration

III) Auflösen nach y

2) Integration durch Substitution Einführen einer Hilfsfunktion $u(x) = f\big(x, y(x)\big)$. Einsetzen von $u'(x)$ für y' sowie $u(x)$ erlaubt in Spezialfällen die Trennung der Variablen.

Jede DGL des Typs $y' = f(ax + by + c)$ kann mit der Substitution $u = ax + by + c\ \ (= y')$ bearbeitet werden. Im Sonderfall $y'{=}u$ gilt $y' = \frac{u'-a}{b}$.

DGL des Typs $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lassen sich mit der Substitution $u(x) = \frac{y}{x}$ bearbeiten.
Für den Sonderfall $y'{=}u$ gilt $y' = u'x + u$, dabei wird $y = ux$ gesetzt.

3) Integration inhomogener linearer DGL durch Variation der Konstanten

13.06.01 Typische Anwendung bei DGL 1. Ordnung: $y' + P(x)y = Q(x)$.

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,dx} \left[c + \int Q(x)\,\mathrm{e}^{+\int P(x)\,dx}\,dx \right]$$

8.3 Lineare DGL mit konstanten Koeefizienten

8.3.1 Lösung des homogenen Falls

Normalform der homogenen DGL n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Allgemeines Verfahren:

I) Lösen der *charakteristischen Gleichung*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

II) Ordnen der Nullstellen r_i (reelle und konjugiert komplexe) nach ihrer Vielfachheit.

III) Aufstellen der Gesamtlösung als Linearkombination der Einzellösungen für jede Nullstelle r_i.

- einfache Nullstelle r_i : Einzellösung $c_i\,\mathrm{e}^{r_i x}$
- m-fache Nullstelle r_i $(m \geq 2)$: Einzellösung $\big(c_{i,1} + c_{i,2}x + \cdots + c_{i,m}x^{m-1}\big)\,\mathrm{e}^{r_i x}$

Gesamtlösung: Summe aller Einzellösungen.

c_i und $c_{i,m}$ sind willkürliche Konstanten.

20.06.01 **8.3.2 Lösung des inhomogenen Falls**

Normalform der inhomogenen DGL n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x)$$

Überlagerungssatz (Superpositionssatz):
Es sei $y_p(x)$ eine spezielle Lösung (*partikuläre* Lösung) der inhomogen DGL. Dann erhält man die allgemeine (vollständige) Lösung mit

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)\,,$$

wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist.

Es gibt kein allgemeines Verfahren für die Berechnung einer partikulären Lösung. Stattdessen ist ein Ansatz zu wählen. Der Ansatz für eine partikuläre Lösung sollte vom Funktionstyp sein, den die Inhomogenität darstellt.

a) $g(x) = c = \text{const}$: Ansatz $y_p = k = \text{const}$
$\rightsquigarrow a_n k = c \rightsquigarrow k = \dfrac{c}{a_n}$

b) $g(x) =$ Polynom vom Grad n
Ansatz: $y_p = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$

c) $g(x) =$ harmonische Funktion $(\sin, \cos)$
Ansatz: $y_p = c_1 \cdot \cos(kx + c_2)\,,$ $\quad c_1, c_2, k = \text{const}$
oder $y_p = a \cos kx + b \sin kx\,,$ $\quad a, b, k = \text{const}$
k wird zweckmäßigerweise entsprechend dem $\sin kx$ bzw. $\cos kx$ der Inhomogenität gewählt.

d) $g(x) =$ Exponentialfunktion
Ansatz: $y_p = c \cdot \mathrm{e}^{kx}\,,$ $\quad c, k = \text{const}$
eventuell erweiterter Ansatz: $y_p = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n) \cdot \mathrm{e}^{kx}$

k wird zweckmäßigerweise entsprechend dem e^{kx} der Inhomogenität gewählt.

Für den allgemeinsten Ansatz wird k komplex.
Ist k eine m-fache Nullstelle r_i des charakteristischen Polynoms, so wird der Ansatz $y_p = c x^m \,\mathrm{e}^{kx}$ empfohlen.

Zur Ansatzwahl siehe auch Papula Band 2, Seiten 464, 491 f. und 549.

fsan2brb, 29. Juni 2001